

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH NINH BÌNH
TRƯỜNG THPT XUÂN TRƯỜNG B

BẢN MÔ TẢ SÁNG KIẾN

Tên sáng kiến:

**XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TOÁN THỰC TIỄN
TRONG DẠY HỌC CHỦ ĐỀ HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT
CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**

Lĩnh vực/cấp học: Toán/THPT

Tác giả:

1. Họ và tên: Bùi Đức Quang
2. Chức vụ: Tổ trưởng chuyên môn
3. Đơn vị công tác: Trường THPT Xuân Trường B

Xuân Trường, tháng 5 năm 2026

I. Thông tin chung

1. Tên tác giả

TT	Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Trình độ chuyên môn	Chức vụ	Nơi công tác	Điện thoại	Tỷ lệ % đóng góp vào việc tạo ra sáng kiến	Chữ ký của tác giả
1	Bùi Đức Quang	05/8/1981	Thạc sĩ	Tổ trưởng tổ Toán	Trường THPT Xuân Trường B	0912657805	100%	

Tên sáng kiến: Xây dựng hệ thống bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề hàm số mũ và hàm số lôgarit cho học sinh trung học phổ thông.

2. Lĩnh vực áp dụng (nêu rõ lĩnh vực có thể áp dụng sáng kiến và vấn đề mà sáng kiến giải quyết):

- Môn Toán trung học phổ thông.

- Áp dụng với đối tượng là học sinh lớp 11 và điều kiện thư viện trường học có sách tham khảo của chủ đề liên quan để học sinh có thể đọc, thiết bị trình chiếu (máy chiếu/ti vi) của nhà trường hoạt động tốt đáp ứng thời gian thực hiện chủ đề trong sáng kiến nêu ra.

- Việc đổi mới chương trình giáo dục phổ thông hiện nay tăng cường các bài toán liên môn và bài toán trong thực tiễn gần gũi liên quan tới chủ đề “Hàm số mũ và hàm số lôgarit”. Do vậy sáng kiến tôi đưa ra các định hướng xây dựng hệ thống bài tập đồng thời đưa ra quan điểm chung nhất để giải quyết những bài tập dạng này. Qua sáng kiến cũng đề xuất, định hướng với các thầy cô khi áp dụng trong dạy học chủ đề cho học sinh nhằm đạt kết quả cao nhất trong quá trình dạy học của thầy cô.

II. Phần mở đầu

Toán học có liên hệ mật thiết với thực tiễn và có ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của đời sống kinh tế, xã hội và đặc biệt là đối với những môn khoa học khác. Những bài toán đặt ra xuất phát từ nhu cầu thực tiễn, từ bài toán cho kinh tế, sản xuất đến giải quyết các bài toán tăng trưởng... Nhiều tri thức toán học, ngay cả toán học đơn giản ở bậc phổ thông, có thể ứng dụng hiệu quả vào đời sống nhưng đòi hỏi những kỹ năng nhất định và một thói quen nhất định. Trang bị những kỹ năng này là công việc của nhà trường và sự rèn luyện của bản thân mỗi người.

Rèn luyện cho học sinh năng lực vận dụng kiến thức toán học vào thực tiễn là điều cần thiết đối với sự phát triển của xã hội và phù hợp với mục tiêu của giáo dục toán học Đảng và Nhà nước ta luôn coi trọng việc phát triển con người, coi con người là nguồn lực hàng đầu của đất nước. Con người được giáo dục và tự giáo dục luôn được coi là nhân tố quan trọng nhất vừa là động lực, vừa là mục tiêu cho sự phát triển bền vững của xã hội. Giáo dục Việt Nam đang tập trung đổi mới, hướng tới một nền giáo dục tiến bộ, hiện đại ngang tầm với các nước trong khu vực và trên thế giới.

Các kiến thức học sinh được học phải gắn liền với thực tiễn gần gũi trong cuộc sống. Chính vì thế vai trò của các bài toán có nội dung thực tiễn trong dạy học toán là không thể không đề cập đến. Và cũng vì lẽ đó mà các nhà giáo dục đã không ngừng cải cách, chỉnh sửa nội dung giảng dạy cho phù hợp với yêu cầu xã hội. Chương trình giáo dục phổ thông mới hướng vào mục tiêu phát triển năng lực cho người học. Trong dạy học môn Toán cần phải tăng cường khả năng vận dụng kiến thức và kỹ năng toán học vào thực tiễn thông qua việc giải quyết các tình huống nảy sinh trong cuộc sống. Các giáo viên cần phải giúp đỡ học sinh phát triển các kỹ năng mà họ sẽ sử dụng hàng ngày để giải quyết vấn đề, đồng thời cần phải giúp họ cảm nhận được rằng toán học là hữu ích và có ý nghĩa.

Việc thường xuyên vận dụng toán học vào thực tiễn sẽ giúp học sinh nhìn thấy những khía cạnh toán học ở các tình huống thường gặp trong cuộc sống, tăng cường khả năng giải quyết các vấn đề trong cuộc sống bằng tư duy toán học, giúp tập luyện thói quen làm việc khoa học, nâng cao ý thức tối ưu hóa trong lao động... Đây là những phẩm chất quan trọng đối với người lao động trong xã hội ngày nay. Để làm được điều này học sinh phải có khả năng thu nhận được thông tin toán học từ tình huống thực tiễn ban đầu, chuyển đổi thông tin giữa thực tiễn và toán học, thiết lập được mô hình toán học từ tình huống thực tế.

Các bài toán thực tiễn liên quan đến chủ đề “Hàm số mũ và hàm số lôgarit” hiện không có nhiều tài liệu phục vụ cho giáo viên giảng dạy cũng như cho học sinh tham khảo. Vì vậy bằng kinh nghiệm dạy học, tôi đã tập hợp, định hướng xây dựng câu hỏi có liên quan đến thực tiễn của chủ đề đồng thời phân dạng theo từng

loại để giáo viên và học sinh có thêm một tài liệu phục vụ cho việc giảng dạy, học tập của mình.

Từ thực tế này, tôi đã nghiên cứu và hoàn thiện sáng kiến kinh nghiệm với nội dung ***“Xây dựng hệ thống bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề hàm số mũ và hàm số lôgarit cho học sinh trung học phổ thông”*** nhằm góp phần nâng cao hiệu quả dạy và học các bài toán thực tế trong chương trình toán lớp 11 nói chung và trong dạy học chủ đề liên quan nói riêng.

Qua nội dung của sáng kiến này tôi mong muốn sẽ cung cấp tới thầy cô và các em học sinh phương pháp chung nhất để giải những bài toán ứng dụng thực tiễn, bên cạnh đó giúp học sinh thấy được ý nghĩa của việc học toán ở trường phổ thông có mối liên hệ chặt chẽ với cuộc sống hàng ngày cũng như trong các môn khoa học khác. Từ đó khơi dậy hứng thú học tập, giúp các em yêu thích môn học hơn, có động lực hơn để học tập đạt kết quả tốt nhất. Và quan trọng hơn hết là nhằm rèn luyện cho các em kỹ năng và giáo dục cho các em tự tin hơn, chủ động hơn, sẵn sàng ứng dụng toán học một cách có hiệu quả trong các lĩnh vực kinh tế, sản xuất, xây dựng và bảo vệ Tổ quốc – đúng với tính thần của Đảng và nhà nước về mục tiêu giáo dục: *“Đào tạo những con người lao động tự chủ, năng động và sáng tạo, có năng lực giải quyết các vấn đề do thực tiễn đặt ra, tự lo được việc làm, lập nghiệp và thăng tiến trong cuộc sống, qua đó góp phần xây dựng đất nước giàu mạnh, xã hội công bằng, dân chủ, văn minh”*.

III. Phần nội dung

1. Mô tả giải pháp đã biết

Trong giai đoạn đổi mới căn bản, toàn diện GD-ĐT hiện nay, vấn đề tăng cường rèn luyện cho học sinh khả năng và thói quen ứng dụng kiến thức, kỹ năng, phương pháp tư duy toán học vào các môn học khác hoặc các tình huống thực tiễn là nhiệm vụ quan trọng trong dạy học môn Toán nói riêng và dạy học ở phổ thông nói chung.

“Hàm số mũ và hàm số lôgarit” là một trong những chủ đề cơ bản, quan trọng trong chương trình môn Toán ở phổ thông. Dạy học chủ đề này không những trang bị cho học sinh những tri thức, kỹ năng cần thiết về hàm số mũ, hàm số lôgarit, mà còn có nhiều cơ hội giúp các em vận dụng vào nghiên cứu các môn học khác và giải thích các hiện tượng trong thực tiễn. Vì vậy, một trong những mục tiêu quan trọng trong dạy học chủ đề “Hàm số mũ và hàm số lôgarit” là giúp học sinh thấy được ứng dụng thực tiễn của chủ đề này, đồng thời rèn luyện cho các em khả năng sử dụng kiến thức về “Hàm số mũ và hàm số lôgarit” để giải quyết vấn đề trong các môn học khác. Tuy nhiên, thực tế dạy học “Hàm số mũ và hàm số lôgarit” ở phổ thông mới chỉ tập trung chủ yếu trang bị cho học sinh vốn tri thức, kỹ năng về hàm số mũ, hàm số lôgarit, chưa tạo cơ hội nhiều cho học sinh vận dụng những tri thức, kỹ năng này vào thực tiễn. Sáng kiến này tôi đề cập tới

việc xây dựng hệ thống bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề “Hàm số mũ và hàm số lôgarit” ở trường trung học phổ thông.

2. Nội dung các giải pháp mới; tính mới, tính sáng tạo; hiệu quả áp dụng, khả năng nhân rộng của sáng kiến

2.1. Nội dung các giải pháp mới

2.1.1. Mối liên hệ giữa toán học và thực tiễn

Mối liên hệ giữa toán học và thực tiễn thể hiện ở các đặc điểm:

- Toán học có nguồn gốc từ thực tiễn: lịch sử của toán học gắn liền với sự phát triển của loài người, những khái niệm được hình thành hầu hết xuất phát từ thực tiễn, từ nhu cầu tìm tòi và khám phá của con người.
- Toán học phản ánh thực tiễn: những kiến thức của toán học có khả năng phản ánh thực tiễn một cách đa dạng, toàn diện.
- Toán học có ứng dụng trong thực tiễn: toán học có ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học, công nghệ cũng như trong sản xuất và đời sống; chẳng hạn: ứng dụng của đạo hàm để tính vận tốc tức thời của chuyển động, ứng dụng tích phân để tính diện tích, thể tích...

2.1.2. Bài toán thực tiễn trong dạy học môn Toán

Theo G.Polya: “Bài toán thực tiễn là bài toán đặt ra sự cần thiết phải tìm kiếm một cách có ý thức phương tiện thích hợp để đạt tới một mục đích rõ ràng nhưng không thể đạt được ngay”

Theo tôi, bài toán thực tiễn là bài toán mà trong phần đã cho hay phần cần tìm, cần làm sáng tỏ những nội dung liên quan đến thực tiễn. Thực tiễn ở đây không chỉ là các sự việc, tình huống trong cuộc sống mà còn là các tình huống nảy sinh trong các môn học khác như: Vật lí, Hóa học, Sinh học...

Trong dạy học Toán, bài toán thực tiễn có vai trò rất quan trọng, cụ thể:

- Thông qua bài toán thực tiễn, học sinh hiểu rõ hơn các khái niệm, tính chất; được củng cố kiến thức; mở rộng sự hiểu biết một cách sinh động, phong phú.
- Bài toán thực tiễn làm rõ được mối liên hệ phong phú.
- Bài toán thực tiễn làm rõ được mối liên hệ giữa các kiến thức toán học với các môn học khác, với thiên nhiên, môi trường, những vấn đề thiết thực trong cuộc sống.
- Bài toán thực tiễn còn giúp học sinh bước đầu biết vận dụng kiến thức để lí giải và cải tạo thực tiễn nhằm nâng cao chất lượng cuộc sống.
- Rèn luyện và phát triển cho học sinh năng lực nhận thức, năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề.
- Rèn luyện cho học sinh tính kiên nhẫn, tự giác, chủ động, sáng tạo trong học tập và giải quyết các vấn đề thực tiễn.

- Vì các bài toán thực tiễn gắn liền với vấn đề thực tiễn.
- Vì các bài toán thực tiễn gắn liền với đời sống và với môi trường xung quanh nên giúp học sinh thấy rõ lợi ích của việc học môn Toán, từ đó tạo động cơ học tập tích cực, kích thích trí tò mò, sự quan sát, sự ham hiểu biết, làm tăng hứng thú học tập môn Toán, say mê nghiên cứu khoa học, có những định hướng nghề nghiệp trong tương lai.

2.1.3. Quy trình giải bài toán thực tiễn

Dựa trên những gợi ý của Polya về cách thức giải bài toán gồm 04 bước đã được kiểm nghiệm trong thực tiễn dạy học, có thể thấy việc giải bài toán thực tiễn không nằm ngoài quy trình giải bài toán nói chung. Tuy nhiên, ở quy trình giải bài toán thực tiễn, sự gợi ý chi tiết trong từng bước có sự khác biệt. Cụ thể:

Bước 1: Tìm hiểu nội dung của bài toán. Đọc đề bài và xác định bài toán cho gì, yêu cầu gì? Bài toán có những đại lượng nào? Mối liên hệ giữa chúng ra sao?

Toán học hóa các đại lượng và các mối quan hệ đó: chuyển bài toán với những ngôn ngữ, dữ kiện thực tiễn thành bài toán thuần túy toán học. Các ràng buộc giữa các yếu tố trong bài toán thực tiễn được chuyển thành các biểu thức, phương trình, hệ phương trình, hệ bất phương trình toán học,...

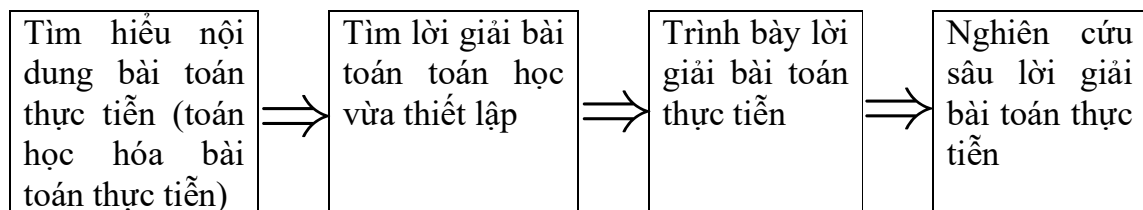
Bước này có ý nghĩa quan trọng đối với việc giải quyết một bài toán thực tiễn, đồng thời phản ánh khả năng, trình độ của người học đối với việc hiểu và vận dụng các tri thức toán học.

Bước 2: Tìm lời giải cho bài toán. Sau khi chuyển từ vấn đề thực tiễn thành một bài toán thì bước 2 thực chất là tìm lời giải cho bài toán đó.

Bước 3: Trình bày lời giải. Từ cách giải đã được phát hiện ở bước 2, chuyển từ ngôn ngữ toán học sang ngôn ngữ thực tiễn, sau đó sắp xếp quy trình giải bài toán thành các bước, thực hiện theo một trình tự thích hợp và thực hiện các bước đó.

Bước 4: Nghiên cứu sâu lời giải. Nghiên cứu khả năng ứng dụng kết quả của bài toán thực tiễn. Nghiên cứu những bài toán tương tự, mở rộng hay lật ngược vấn đề của bài toán thực tiễn. Đây là hoạt động nhằm phát huy khả năng tư duy, tìm tòi sáng tạo của học sinh.

Các bước giải một bài toán thực tiễn được khái quát hóa dưới dạng sơ đồ như sau:



2.1.4. Phương pháp xây dựng bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề “Hàm số mũ và hàm số logarit” ở trường trung học phổ thông

Trong dạy học môn Toán, có nhiều cách khác nhau để xây dựng bài toán thực tiễn. Dưới đây, tôi trình bày một số phương pháp xây dựng bài toán thực tiễn như sau:

- **Xuất phát từ nhu cầu giải quyết vấn đề trong thực tiễn cuộc sống.** Trong thực tiễn cuộc sống có nhiều vấn đề cụ thể nảy sinh cần phải giải quyết bằng việc sử dụng kiến thức của chủ đề “Hàm số mũ và hàm số lôgarit”.

Ví dụ 1: Từ một tình huống thực tiễn là một người cần vay ngân hàng số tiền là 1 tỉ đồng với lãi suất là 10,5%/năm, với mong muốn 5 năm sau sẽ trả hết nợ. Vấn đề đặt ra là người này cần phải trả bao nhiêu tiền một tháng? Khi đó, sẽ xuất hiện bài toán thực tiễn: “Một người vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất là 10,5% một năm. Hỏi người đó phải trả ngân hàng mỗi tháng bao nhiêu tiền để sau 5 năm người đó trả hết nợ ngân hàng?”

- **Xuất phát từ nhu cầu giải quyết các vấn đề trong thực tiễn các môn học khác.** Không chỉ trong thực tiễn cuộc sống mà trong quá trình học tập các môn học khác cũng nảy sinh những vấn đề cụ thể, để giải quyết những vấn đề đó cần sử dụng kiến thức về hàm số mũ và hàm số lôgarit.

Ví dụ 2 (Giải quyết bài toán thực tiễn trong dạy học môn Vật lí): Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ âm. Đơn vị thường dùng để đo mức cường độ âm là đêxinben (viết tắt là dB). Khi đó, mức cường độ L của âm được tính theo công thức $L(dB) = 10 \log \frac{I}{I_0}$. Trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe, $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Tiếng ồn phát ra từ một xưởng cưa, ở mức cường độ âm đo được là 93 dB , do 7 chiếc cưa máy giống nhau cùng hoạt động tạo ra. Giả sử có 3 chiếc cưa máy đột ngột ngừng hoạt động thì mức cường độ âm trong xưởng lúc này là bao nhiêu?

- **Thêm các yếu tố thực tiễn vào bài toán thuần túy toán học.** Từ những bài toán thuần túy toán học, ta xây dựng mô hình thực tiễn tạo thành một bài toán thực tiễn. Để giải được bài toán đó, cần đưa về việc giải bài toán thuần túy toán học.

Ví dụ 3: Xuất phát từ bài toán thuần túy toán học: “Giải phương trình $525 = 21 \cdot e^{28x}$ ”, ta có thể thêm các yếu tố thực tiễn để thu được bài toán thực tiễn như sau: “Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn được tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là 21 con, sau 28 giờ là 525 con. Hỏi tỉ lệ tăng trưởng của vi khuẩn đó là bao nhiêu?”

- **Thay đổi một số dữ liệu của một bài toán thực tiễn để tạo thành một bài toán thực tiễn khác.** Từ một bài toán thực tiễn đã có, ta có thể thay đổi một số dữ

liệu (như số liệu, tên gọi,...) sao cho phù hợp để tạo thành một bài toán thực tiễn mới có cách giải tương tự như bài toán đã cho.

Ví dụ 4: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kì hạn một quý với lãi suất là $1,65\%$ một quý. Hỏi sau bao lâu người đó được ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (giả sử lãi suất không thay đổi).

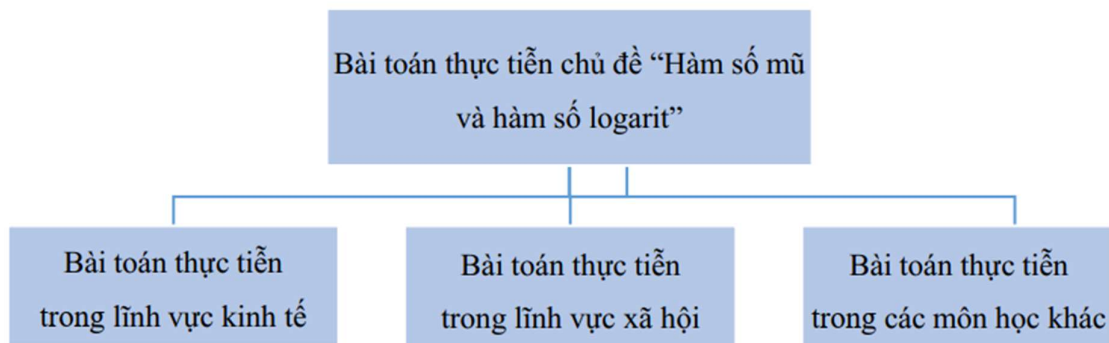
Vì các ngân hàng chỉ thông báo phần trăm lãi suất trên một năm đối với từng kì hạn, không thông báo lãi suất trên một quý nên ta có thể xây dựng bài toán mới phù hợp với thực tế hơn và có cách giải tương tự như bài toán đã cho như sau: “Vừa bán được mảnh đất 450 triệu đồng, chú Nam gửi luôn vào ngân hàng ViettinBank với kì hạn 1 năm theo thể thức lãi kép, lãi suất $6,8\%$ một năm. Hỏi sau bao lâu thì chú có được ít nhất 600 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu”? (giả sử lãi suất không thay đổi).

- Lựa chọn bài toán thực tiễn từ các tài liệu sẵn có. Các bài toán thực tiễn có thể được lựa chọn trong sách giáo khoa, sách bài tập, sách tham khảo, tài liệu trên mạng, đề kiểm tra,...

Ví dụ 5 (Đề thi thử tốt nghiệp THPT Quốc gia năm 2018 môn Toán của Sở GD-ĐT Bắc Giang): Một người vay ngân hàng 500 triệu đồng với lãi suất $1,2\%$ một tháng để mua xe ô tô. Nếu mỗi tháng người đó trả ngân hàng 10 triệu đồng và thời điểm bắt đầu trả cách thời điểm vay là một tháng, hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người đó trả hết nợ cho ngân hàng? Biết rằng lãi suất không thay đổi.

2.1.5. Một số dạng bài toán thực tiễn chủ đề Hàm số mũ và hàm số logarit

Tôi đề xuất hệ thống hóa một số dạng bài toán thực tiễn chủ đề “Hàm số mũ và hàm số logarit” theo sơ đồ dưới đây:



Sau đây, tôi xin trình bày một số ví dụ về các dạng bài toán thực tiễn chủ đề “Hàm số mũ và hàm số logarit” được xây dựng theo các phương pháp đã nêu:

Dạng 1: Bài toán thực tiễn trong lĩnh vực kinh tế

Bài toán 1: Bạn Bình muốn thu được khoảng 280 triệu đồng bằng cách đầu tư ở hiện tại là 170 triệu đồng, với lãi suất sinh lời là 13% một năm theo thể thức lãi kép. Xác định thời gian cần thiết để bạn Bình đầu tư.

Hướng dẫn

Từ công thức tính lãi kép $S_n = A(1+r)^n$, suy ra số thời gian đầu tư là:

$$n = \log_{1+r} \left(\frac{S_n}{A} \right) = \log_{1+0,13} \left(\frac{280}{170} \right) \approx 4,08 \text{ năm (khoảng 4 năm 1 tháng)}$$

Bài toán 2: Bạn An trúng tuyển vào Đại học Bách Khoa Hà Nội. Do điều kiện của gia đình khó khăn, để có tiền đi học, bạn An quyết định vay ngân hàng trong 4 năm, mỗi năm vay 9 000 000 đồng với lãi suất 0,5% một tháng. Sau khi tốt nghiệp đại học, bạn An phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,3% một tháng trong vòng 5 năm. Tính số tiền T hàng tháng mà An phải trả cho ngân hàng.

Hướng dẫn

Do An vay ngân hàng trong 4 năm, mỗi năm vay 9 000 000 đồng với lãi suất là 0,5% một tháng nên lãi suất một năm An phải trả ngân hàng là 6%.

Vì vậy, áp dụng công thức $S_n = a(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ ta có tổng số tiền An nợ ngân hàng sau 4 năm học là:

$$S_n = 9\,000\,000 \cdot (1 + 0,06) \cdot \frac{(1 + 0,06)^4 - 1}{0,06} = 41\,733\,836,64 \text{ (đồng)}$$

Sau khi tốt nghiệp đại học, An trả ngân hàng hàng tháng T đồng nên áp dụng công thức $T = \frac{a(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}$, với $a = 41\,733\,836,64$; $n = 60$; $r = 0,3\%$ ta được $T \approx 761\,082$ (đồng).

Bài toán 3: Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm đưa vào sử dụng, giá trị của máy không quá 50% so với ban đầu?

Hướng dẫn

Ta có tại thời điểm ban đầu, giá trị của chiếc máy là: $P(0) = 500$ triệu đồng.

Theo đề, ta có bất phương trình $500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \leq 250 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{t}{3} \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 3$.

Vậy sau ít nhất 3 năm đưa vào sử dụng thì giá trị của máy không quá 50% so với ban đầu.

Bài toán 4: Công ty FTK về mua bán xe ô tô đã qua sử dụng, sau khi khảo sát thị trường 6 tháng đã đưa ra công thức chung về giá trị còn lại của ô tô 4 chỗ kể từ khi đưa vào sử dụng (các loại xe 4 chỗ không sử dụng mục đích kinh doanh) được

tính $P(t) = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}}$. Trong đó A là giá tiền ban đầu mua xe, t là số năm kể từ

khi đưa vào sử dụng. Tính giá trị còn lại của xe ô tô sau 30 tháng đưa vào sử dụng. Biết giá trị mua xe ban đầu là 920 triệu đồng.

Hướng dẫn

Ta có: $A = 920$ triệu đồng; $t = 2,5$ năm.

Vậy giá trị còn lại của xe ô tô sau 30 tháng đưa vào sử dụng là:

$$P(2,5) = 920 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2,5}{4}} = 768,601304 \text{ (triệu đồng)}.$$

Bài toán 5: Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A

tuân theo công thức $P(n) = \frac{1}{1 + 49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

Hướng dẫn

Theo bài ra, ta có $\frac{1}{1 + 49e^{-0,015n}} > 0,3 \Leftrightarrow 1 + 49e^{-0,015n} < \frac{10}{3} \Leftrightarrow e^{-0,015n} < \frac{7}{147}$

$$\Leftrightarrow -0,015n < \ln \frac{7}{147} \Leftrightarrow n > -\frac{1}{0,015} \ln \frac{7}{147} \approx 202,97.$$

Vậy ít nhất 203 lần quảng cáo.

Bài toán 6: Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy khi một loại máy lọc không khí mới được giới thiệu ra thị trường, hàm lợi nhuận $P(t)$ sau t tháng là nguyên

hàm của hàm tốc độ sinh lời $p(t) = \frac{500[1,4 - \ln(0,5t + 1)]}{t + 2}$ (chục triệu đồng

mỗi tháng). Biết rằng công ty phải chi 1 tỷ đồng để sản xuất máy lọc không khí. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Với $P(t) = 700\ln(t+2) - 250\ln^2(0,5t+1) + C$ thì C là hằng số.

b) Lợi nhuận đạt cực đại bằng 3,9 tỷ đồng (làm tròn đến hàng đơn vị).

c) Công ty bắt đầu thua lỗ vào tháng thứ 26.

d) Một sản phẩm được gọi là "trào lưu" nếu lợi nhuận tại thời điểm cực đại bằng 2 lần lợi nhuận sản phẩm sau khi đạt cực đại 12 tháng. Như vậy, sản phẩm trên không phải một trào lưu.

Hướng dẫn

a) Đúng:

$$\begin{aligned} P(t) &= \int \frac{500[1,4 - \ln(0,5t+1)]}{t+2} dt = \int \left(\frac{700}{t+2} - 500 \cdot \frac{\ln(0,5t+1)}{t+2} \right) dt \\ &= 700\ln(t+2) - 250 \cdot \int \frac{\ln(0,5t+1)}{0,5t+1} dt + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(t) = 700\ln(t+2) - 250\ln^2(0,5t+1) + C.$$

b) Đúng: Ta có $P(0) = 0 \Rightarrow C + 700\ln(2) = 0 \Rightarrow C = -700\ln(2)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(t) &= 700\ln(t+2) - 250\ln^2(0,5t+1) - 700\ln(2) \cdot p(t) \\ &= \frac{500[1,4 - \ln(0,5t+1)]}{t+2} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow t = 2(e^{1,4} - 1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm $P(t) \Rightarrow P(2(e^{1,40} - 1)) = 490$ (chục triệu đồng) = 4,9 (tỷ đồng).

Vi công ty ban đầu đã chi 1 tỷ đồng để sản xuất máy lọc không khí nên lợi nhuận cực đại là $4,9 - 1 = 3,9$ (tỷ đồng).

c) Sai: Ta có $P(26) = 70 \cdot 0 \cdot \ln(28) - 250 \cdot \ln^2(13+1) - 700\ln 2 \approx 106 > 0$

d) Đúng: Ta có lợi nhuận đạt cực đại tại thời điểm $t = 2(e^{1,4} - 1)$.

$\Rightarrow$ Thời điểm sau khi đạt cực đại 12 tháng là $t_1 = 2(e^{1,4} - 1) + 12$.

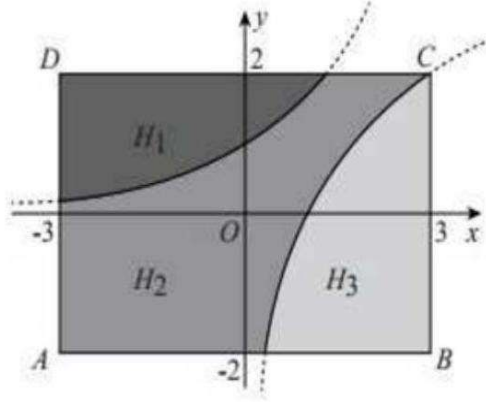
$\Rightarrow P(t_1) \approx 284$ chục triệu đồng = 2,84 tỷ đồng.

$\Rightarrow$ Lợi nhuận tại thời điểm sau khi đạt cực đại 12 tháng là $2,84 - 1 = 1,84$ tỷ đồng.

Mà lợi nhuận cực đại là 3,9 tỷ đồng $\Rightarrow$ Lợi nhuận cực đại lớn hơn 2 lần lợi nhuận sản phẩm sau khi đạt cực đại 12 tháng.

$\Rightarrow$ Sản phẩm trên không phải là một trào lưu.

Bài toán 7: Một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $6(\text{m}) \times 4(\text{m})$, được bạn An trang trí bằng cách vẽ hai đồ thị $f(x) = a^x, g(x) = \log_b x$ (a, b là các số dương và khác 1) đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$ và chia thành ba phần (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Phần H_1 được sơn màu xanh da trời, phần H_2 được sơn màu vàng, phần H_3 được sơn màu xanh lá cây. Biết rằng mỗi hộp sơn các màu chỉ sơn được $3(\text{m}^2)$ tường, đồng thời giá của hộp sơn màu xanh da trời là 100000 đồng/hộp, hộp sơn vàng là 140000 đồng/hộp, hộp sơn xanh lá cây là 130000 đồng/hộp. Tính giá tiền bạn Hà mua để sơn bức tường này (đơn vị là triệu đồng và cửa hàng sơn chỉ bán số nguyên của hộp).

Hướng dẫn

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số $g(x) = \log_b x$ đi qua $(3; 2)$ nên $2 = \log_b 3 \Rightarrow b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$ (do $b > 0$). Khi đó $g(x) = \log_{\sqrt{3}} x$.

Mặt khác đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đối xứng nhau qua $y = x$ nên $f(x) = (\sqrt{3})^x$.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = 2$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{3})^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\sqrt{3}} 2$.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x)$ và $y = -2$ là nghiệm của phương trình $g(x) = -2 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} x = -2 \Leftrightarrow x = (\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{3}$.

Diện tích phần H_1 là $S_1 = \int_{-3}^{\log_{\sqrt{3}} 2} 2 - (\sqrt{3})^x dx \approx 5,23 (m^2)$.

Như vậy ta cần dùng 2 hộp sơn màu xanh da trời.

Diện tích phần H_3 là $S_3 = \int_{\frac{1}{3}}^3 (\log_{\sqrt{3}} x + 2) dx \approx 7,15 (m^2)$.

Như vậy ta cần dùng 3 hộp sơn xanh lá cây.

Diện tích phần H_2 là:

$$S_2 = 24 - \int_{-3}^{\log_{\sqrt{3}} 2} 2 - (\sqrt{3})^x dx - \int_{\frac{1}{3}}^3 (\log_{\sqrt{3}} x + 2) dx \approx 11,62 (m^2).$$

Như vậy ta cần dùng 4 hộp sơn vàng.

Vậy tổng số tiền là:

$$100000.2 + 140000.4 + 130000.3 = 1150000 \text{ (đồng)} = 1,15 \text{ triệu đồng.}$$

Bài toán 8: Ông An gửi tiết kiệm tích lũy cho con tại một ngân hàng với số tiền tiết kiệm ban đầu là 200 000 000 đồng, lãi suất 7% / năm. Từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20 000 000 đồng. Ông không rút lãi định kỳ hàng năm. Biết rằng, lãi suất định kỳ hàng năm không thay đổi. Hỏi sau 18 năm, số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi gần nhất với đáp án nào sau đây?

- A. 1 335 967 000 đồng. B. 1 686 898 000 đồng.
C. 743 585 000 đồng. D. 739 163 000 đồng.

Hướng dẫn

Sau năm thứ nhất số tiền mà ông An nhận được là $200 \cdot (1 + 7\%) = 214$ triệu đồng.

Đầu năm thứ 2, ông An gửi thêm vào 20 triệu đồng nên đến cuối năm thứ 2 số tiền ông nhận được là $(214 + 20) \cdot (1 + 7\%)$ triệu đồng. Đầu năm thứ 3, ông An gửi vào 20 triệu đồng nên đến cuối năm thứ 3 số tiền ông nhận được là:

$$\left[(214 + 20) \cdot (1 + 7\%) + 20 \right] \cdot (1 + 7\%) = (214 + 20) \cdot (1 + 7\%)^2 + 20 \cdot (1 + 7\%)$$

$$\begin{aligned} &\text{Cứ tiếp tục như thế đến năm thứ 18 số tiền ông An nhận được là} \\ &\left[(214 + 20) \cdot (1 + 7\%)^{17} + 20 \cdot (1 + 7\%) \cdot \left[1 + (1 + 7\%) + (1 + 7\%)^2 + \dots + (1 + 7\%)^{15} \right] \right] \\ &= (214 + 20) \cdot (1 + 7\%)^{17} + 20 \cdot (1 + 7\%) \cdot \frac{(1 + 7\%)^{16} - 1}{7\%} \approx 1335,967105 \end{aligned}$$

Nhận xét: Công thức: vốn có A đồng, bắt đầu từ tháng thứ nhất mỗi tháng gửi thêm a đồng với lãi suất mỗi tháng là $r\%$ thì sau n tháng số tiền thu được cả gốc

và lãi là:
$$S = (A + a) \cdot (1 + r\%)^n + a \cdot (1 + r\%) \cdot \frac{(1 + r\%)^{n-1} - 1}{r\%}.$$

Bài toán 9: Chi phí tổng cộng của một công ty được tính như sau $C(t) = 90 - 50.e^{-t}$ (tỉ đồng) với t là thời gian tính bằng số năm kể từ khi công ty thành lập. Chi phí công ty đã chi ra sau 10 năm xấp xỉ bằng

- A. 89 tỉ đồng. B. 90 tỉ đồng.
C. 1101233 tỉ đồng. D. 1101232 tỉ đồng.

Hướng dẫn

Theo bài ra ta có $C(10) = 90 - 50.e^{-10} \approx 90$.

Bài toán 10: Cô Nga gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Nga không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (triệu đồng), cô Nga sử dụng công thức

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{100} \right).$$
 Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Tổng số tiền x thu được tăng lên khi số năm gửi y tăng lên do đó hàm số

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{100} \right)$$
 đồng biến trên tập xác định.

b) Sau ít nhất 12 năm thì cô Nga có thể rút ra được số tiền gấp đôi số tiền đã gửi từ tài khoản tiết kiệm đó.

c) Có một dự án đầu tư đòi hỏi chi phí hiện tại là 100 triệu đồng và sau 5 năm sẽ đem lại 150 triệu đồng. Cô Nga nếu đầu tư vào dự án này sẽ thu về khoản lợi nhuận nhiều hơn là gửi tiền vào ngân hàng đã nêu.

d) Do tham gia bảo hiểm nhân thọ nên hàng năm cô Nga phải đóng phí là 20 triệu đồng. Cô dự kiến sau khi gửi tiền được một năm thì hàng năm sẽ rút 20 triệu đồng từ tiền gốc và lãi thu được để đóng bảo hiểm, số tiền còn lại thì cô tiếp tục gửi ngân hàng (giả sử quy định về lãi suất tiền gửi không thay đổi). Cô Nga sử dụng số tiền theo cách đó sẽ đóng bảo hiểm được tối đa 6 năm từ số tiền 100 triệu vốn ban đầu.

Hướng dẫn

a) Đúng

b) Đúng: Với $x = 200$ ta có $\log_{1.06} \left(\frac{200}{100} \right) = \log_{1.06} 2 \simeq 11,9 \Rightarrow y \geq 12$ (năm).

c) Đúng: Với $x = 150$ ta có $\log_{1.06} \left(\frac{150}{100} \right) = \log_{1.06} 1,5 \simeq 6,96 \Rightarrow y \geq 7$ (năm).

Nên nếu gửi ngân hàng thì cần ít nhất 7 năm thì mới thu về được số tiền 150 triệu, mà để đầu tư dự án thì chỉ mất 5 năm.

d) Đúng: Sau một năm gửi ngân hàng, số tiền thu được là $x = 100.1,06$ (triệu đồng).

Rút 20 triệu để đóng bảo hiểm nên số tiền còn lại để gửi ngân hàng là $x_1 = 100.1,06 - 20$.

Sau năm thứ hai, tiền thu được trừ đi 20 triệu đóng bảo hiểm thì còn lại tiền gửi ngân hàng là:

$$x_2 = x_1.1,06 - 20 = (100.1,06 - 20).1,06 - 20 = 100.1,06^2 - 20.1,06 - 20.$$

Tiếp tục như vậy ta có: $x_n = 100.1,06^n - 20.(1,06^{n-1} + 1,06^{n-2} + \dots + 1,06 + 1)$

$$= 100.1,06^n - 20. \frac{1 - 1,06^n}{1 - 1,06}.$$

Khi $x_n = 0$, ta có $100.1,06^n = 20. \frac{1 - 1,06^n}{1 - 1,06} \Leftrightarrow 1,06^n = \frac{20}{20 - 100.0,06}$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1,06} \left(\frac{20}{20 - 100.0,06} \right) \simeq 6,12.$$

Với $n = 6$, ta có $x_6 = 100.1,06^6 - 20. \frac{1 - 1,06^6}{1 - 1,06} \simeq 2,3$.

Tức là sau 6 năm thực hiện kế hoạch thì số tiền còn lại là 2,3 triệu đồng.

Vậy số tiền vốn đã có đủ để thực hiện kế hoạch trong 6 năm.

Dạng 2: Bài toán thực tiễn trong lĩnh vực xã hội

Bài toán 1: Theo báo cáo tại Hội nghị triển khai công tác dân số trong tình hình mới năm 2018 của tổng cục Dân số - Kế hoạch hóa gia đình, tỉ lệ tăng dân số ở Việt Nam là 1%. Trong năm 2018, dân số nước ta khoảng 94 triệu người. Dự đoán dân số nước ta là bao nhiêu vào năm 2030? Biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{kt}$, trong đó A là dân số tại thời điểm chọn làm mốc, S là dân số sau mốc thời gian t năm và hệ số k được xác định tùy theo khoảng thời gian.

Hướng dẫn

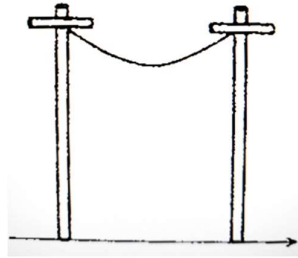
Dân số Việt Nam năm 20230 là $S = 94.e^{(2030-2018).1\%} \approx 106$ (triệu người)

Bài toán 2: Một thành phố có các đường dây điện được treo giữa các cột điện liên tiếp cách nhau 60 (đơn vị) ở bên đường, đoạn dây giữa hai cột điện tạo nên một đường cong thường được gọi là các mắt xích tiếp nối nhau. Khi đó, giả sử đồ thị

hàm số $y = 30 \left(e^{\frac{x}{60}} + e^{-\frac{x}{60}} \right), (-30 \leq x \leq 30)$ là đồ thị của đường cong dây điện

(mắt xích) giữa hai cột điện. Biết rằng khoảng cách giữa điểm thấp nhất trên đường mắt xích và trung điểm của đoạn thẳng nối hai đỉnh của điện được gọi là độ trùng của dây điện (nếu độ trùng của dây vượt quá 8 đơn vị thì sẽ vượt ra khỏi ngưỡng an toàn). Hỏi ở thành phố này độ trùng của dây là bao nhiêu đơn vị độ dài?

- A. 7,7 đơn vị. B. 7 đơn vị. C. 8 đơn vị. D. 8,7 đơn vị.



Hướng dẫn

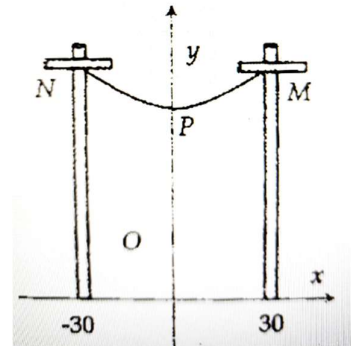
Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.

$$\text{Ta có } y' = 30 \left[\frac{1}{60} e^{\frac{x}{60}} - \frac{1}{60} e^{-\frac{x}{60}} \right] = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{60}} - e^{-\frac{x}{60}} \right)$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Nhận xét, khi $x = 0$ thì $y = 30(e^0 + e^0) = 60$ (đơn vị)

Kí hiệu như hình vẽ ta có tung độ của điểm P bằng với tung độ của điểm M, N .



Do vậy ta chỉ cần tìm tung độ của điểm N .

Mặt khác N nằm trên đồ thị hàm số $y = 30 \left(e^{\frac{x}{60}} + e^{-\frac{x}{60}} \right), (-30 \leq x \leq 30)$ nên

$$y_N = y(30) = 30 \left(e^{\frac{30}{60}} + e^{-\frac{30}{60}} \right) \approx 67,7 \text{ (đơn vị).}$$

Vậy độ trùng dây điện là $67,7 - 60 = 7,7$ đơn vị.

Bài toán 3: Năng lượng giải tỏa E của một trận động đất có cường độ M Richt

tại tâm địa chấn được xác định bởi công thức $\log(E) = 11,4 + 1,5M$. Vào năm

1995, thành phố Kobe xảy ra một trận động đất có cường độ 8 Richters và năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn của nó gấp 14 lần năng lượng giải tỏa của trận động đất xảy ra tại thành phố Niigata vào năm 2004. Hỏi khi đó cường độ của trận động đất tại thành phố Niigata là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn

Năng lượng giải tỏa của trận động đất ở thành phố Kobe năm 1995 tại tâm địa chấn là E_1 . $\log(E_1) = 11,4 + 1,5M_1 \Leftrightarrow \log(E_1) = 11,4 + 1,5.8 \Leftrightarrow E_1 = 10^{23,4}$.

Năng lượng giải tỏa của trận động đất ở thành phố Niigata năm 2004 tại tâm địa chấn là: $E_2 = \frac{E_1}{14} = \frac{10^{23,4}}{14}$.

Gọi M_2 là cường độ của trận động tại thành phố Niigata năm 2004.

$$\log(E_2) = 11,4 + 1,5M_2 \Leftrightarrow \log\left(\frac{10^{23,4}}{14}\right) = 11,4 + 1,5.M_2 \Leftrightarrow M_2 \approx 7,2 \quad \text{độ}$$

Richters.

Bài toán 4: Các nhà tâm lý học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ nhớ được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày?

A. 6.

B. 9.

C. 7.

D. 8.

Hướng dẫn

Để tính số đơn vị kiến thức học sinh đã học được sau một số ngày nhất định, ta chỉ cần thay giá trị của t vào công thức $f(t) = c(1 - e^{(-k.t)})$, trong đó:

Số đơn vị kiến thức học sinh đã học được sau 2 ngày: Thay $t = 2$ vào công thức $f(t) = c(1 - e^{(-k.t)})$, biết rằng $f(t) = 25$ (số đơn vị kiến thức đã học được), $k = 0.2$ (tốc độ tiếp thu), ta có $f(2) = c(1 - e^{-kt}) = 25.(1 - e^{-0,2.2}) \approx 8$ (đơn vị).

Bài toán 5: Một mô hình quan trọng cho nghề cá thương mại là mô hình của Beverton và Holt. Nó bắt đầu bằng việc nghiên cứu một nhóm cá duy nhất, nghĩa

là tất cả các con cá trong nghiên cứu đều được sinh ra cùng một lúc. Giả sử với một nhóm cá bơn, số lượng $N = N(t)$ cá trong quần thể được đưa ra bởi công thức: $N = 1000e^{-0,1t}$ và trọng lượng $w(t)$ của mỗi con cá được đưa ra bởi công thức $w = 5(1 - 0,9e^{-0,1t})^3$ (kg), t là thời gian, tính theo năm là tuổi của cá. Gọi $B(t)$ là tổng trọng lượng của nhóm cá này sau t năm.

a) Trọng lượng của con cá bơn khi mới sinh ra là 50 gam.

b) Tổng trọng lượng của nhóm cá này sau t năm là $B(t) = 5000e^{-0,1t} \cdot (1 - 0,9e^{-0,1t})^3$.

c) Tổng trọng lượng lớn nhất của nhóm cá này là 347 (kg) (làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Tổng trọng lượng nhóm cá này lớn nhất sau 12,8 năm (làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn

a) Sai: Trọng lượng của con cá bơn khi mới sinh ra là

$$w(0) = 5(1 - 0,9e^{-0,1 \cdot 0})^3 = 0,005(\text{kg}) = 5(\text{g}).$$

b) Đúng: Tổng trọng lượng của nhóm cá này sau t năm là:

$$B(t) = N(t) \cdot w(t) = 1000e^{-0,1t} \cdot 5(1 - 0,9e^{-0,1t})^3 = 5000e^{-0,1t} \cdot (1 - 0,9e^{-0,1t})^3$$

c) Sai: Đặt $a = e^{-0,1t}$, $a \in (0;1)$.

$$\text{Ta có } B = 5000e^{-0,1t} \cdot (1 - 0,9e^{-0,1t})^3 = 5000a \cdot (1 - 0,9a)^3$$

$$\Rightarrow B' = 5000(1 - 0,9a)^2(1 - 3,6a)$$

$$\text{Ta có: } B' = 0 \Leftrightarrow 5000(1 - 0,9a)^2(1 - 3,6a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 0,9a)^2 = 0 \\ (1 - 3,6a) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{10}{9}(l) \\ a = \frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{5}{18}.$$

Bảng biến thiên:

a	0	$\frac{5}{18}$	1
B'	-	0	+
B	0	$\frac{9375}{16}$	5

Vậy tổng trọng lượng lớn nhất của nhóm cá này là $\frac{9375}{16} \approx 586$ (kg).

d) Đúng: Ta có: $a = \frac{5}{18} \Rightarrow e^{-0,1t} = \frac{5}{18} \Rightarrow -0,1t = \ln \frac{5}{18} \Rightarrow t = -10 \ln \frac{5}{18}$.

Dưa vào bảng biến thiên ta có: Tổng trọng lượng nhóm cá này lớn nhất tại $a = \frac{5}{18}$

tức là sau $t = -10 \ln \frac{5}{18} \approx 12,8$ năm.

Bài toán 6: Nếu khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là M_0 (g) thì khối lượng carbon-14 còn lại (tính theo gam) sau t năm được tính theo công thức

$$M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} \text{ (g)}, \text{ trong đó } T = 5730 \text{ (năm)} \text{ là chu kì bán rã của carbon-14.}$$

Nghiên cứu hóa thạch của một sinh vật, người ta xác định được khối lượng carbon-14 hiện có trong hóa thạch là $5 \cdot 10^{-13}$ (g). Nhờ biết tỉ lệ khối lượng carbon-14 so với carbon-12 trong cơ thể sinh vật sống, người ta xác định được khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là $M_0 = 1,2 \cdot 10^{-12}$ (g). Sinh vật này sống cách đây bao nhiêu năm? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn

Gọi t là thời gian từ lúc sinh vật chết đến nay. Ta có:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 10^{-13} &= 1,2 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = \frac{5}{12} \\ \Rightarrow \frac{t}{T} &= \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{12} \Rightarrow t = T \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{12} = 5730 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{12} \approx 7237 \end{aligned}$$

Vậy sinh vật này sống cách đây khoảng 7237 năm.

Bài toán 7: Trong một số trường hợp, tin đồn lan truyền và được mô hình hoá

bằng hàm số: $p(t) = \frac{1}{1 + a \cdot e^{-kt}}$, trong đó $p(t)$ là tỉ lệ dân số biết tin đồn tại thời

điểm t (giờ) và a, k là hằng số dương. Giả sử $a = 10$ và $k = 0,5$. Khi đó, các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 1$.

b) Tốc độ lan truyền tin đồn là $p'(t) = \frac{10e^{-0,5t}}{(1 + 10e^{-0,5t})^2}$.

c) Tốc độ lan truyền tin đồn lớn nhất sau 9,2 giờ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

d) Tại thời điểm tin đồn lan truyền với tốc độ lớn nhất thì có 50% dân số biết tin đồn (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn

a) Đúng: Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + a \cdot e^{-kt}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$.

b) Sai.

c) Sai: Đặt $a = 10 \cdot e^{-0,5t}$, khi đó:

$$\begin{aligned} p'(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{(1+a)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a^2 + 2a + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a + 2 + \frac{1}{a}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(a + \frac{1}{a}\right) + 2} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} + 2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} a = 1 &\Rightarrow 10 \cdot e^{-0,5t} = 1 \Rightarrow e^{-0,5t} = \frac{1}{10} \Rightarrow -0,5t = \ln \frac{1}{10} = -\ln 10 \\ &\Rightarrow t = 2\ln 10 \approx 4,6(\text{h}). \end{aligned}$$

d) Đúng: Tại thời điểm tin đồn lan truyền với tốc độ lớn nhất thì tỉ lệ dân số biết tin đồn là $p(2\ln 10) = \frac{1}{2} = 50\%$.

Bài toán 8: Một nghiên cứu đã cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \cdot \ln(t+1), t \geq 0$ (%). Hỏi sau khoảng bao lâu thì nhóm học sinh nhớ danh sách đó là dưới 10%?

- A. 24 tháng. B. 25 tháng. C. 23 tháng. D. 22 tháng.

Hướng dẫn

Ta có $75 - 20 \cdot \ln(t + 1) = 10 \Leftrightarrow \ln(t + 1) = \frac{13}{4} \Leftrightarrow t \approx 24,79$ tháng.

Bài toán 9: Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái Đất nóng lên. Theo nghiên cứu, khi nhiệt độ Trái Đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm $2,1^0\text{C}$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm $5,3^0\text{C}$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái đất tăng thêm $t^0\text{C}$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ với $f(t) = k \cdot a^t$, trong đó k và a là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm bao nhiêu thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%? (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(2,1) = 3 \\ f(5,3) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \cdot a^{2,1} = 3 & (1) \\ k \cdot a^{5,3} = 10 & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Lấy (2) chia (1) theo vế, ta có } a^{3,2} = \frac{10}{3} \Rightarrow a = \left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{1}{3,2}}.$$

$$\text{Thay vào (1) ta được: } k \cdot a^{2,1} = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{a^{2,1}} = \frac{3}{\left[\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{1}{3,2}}\right]^{2,1}}.$$

Khi $f(t) = 20$, ta có:

$$k \cdot a^t = 20 \Rightarrow a^t = \frac{20}{k} \Rightarrow t = \log_a \left(\frac{20}{k}\right) = \log_{\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{1}{3,2}}} \left\{ \frac{20 \cdot \left[\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{1}{3,2}}\right]^{2,1}}{3} \right\} \approx 7,14.$$

Vậy nhiệt độ Trái đất tăng thêm khoảng $7,14^0\text{C}$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%.

Bài toán 10: Số ca bị nhiễm virus Covid-19 ở một quốc gia sau t ngày là $P(t)$ và được tính bởi công thức $P(t) = X \cdot e^{r_0(t-1)}$, trong đó X là số ca bị nhiễm virus trong ngày thống kê đầu tiên, r_0 là hệ số lây nhiễm. Hỏi ngày thứ 20 có bao nhiêu ca bị lây nhiễm virus? (làm tròn đến hàng đơn vị). Biết rằng trong ngày đầu tiên thống kê có 253 ca bị nhiễm bệnh, ngày thứ 10 có 2024 ca bị lây nhiễm và trong suốt quá trình thống kê hệ số lây nhiễm là không đổi?

Hướng dẫn

Theo giả thiết ta có $P(1) = X = 253$.

Ngày thứ 10 có 2024 ca nên $P(10) = X \cdot e^{9r_0} \Leftrightarrow 2024 = 253 \cdot e^{9r_0} \Leftrightarrow r_0 = \frac{\ln 8}{9}$.

Vậy ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh là $P(20) = 253 \cdot e^{\frac{19 \ln 8}{9}} \approx 20401$.

Dạng 3: Bài toán thực tiễn trong các môn học khác

Bài toán 1: Nếu thường xuyên nghe tiếng ồn có mức cường độ âm khoảng 90 dB thì có nguy cơ bị giảm thính lực, thậm chí bị điếc. Biết mức cường độ âm được tính theo công thức $L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$, trong đó I là cường độ âm và I_0 là cường độ âm chuẩn. Người ta đo được tiếng nhạc mạnh phát ra từ loa là $\frac{I}{I_0} = 7 \times 10^8$.

Hãy đưa ra lời khuyên về thính lực cho các bạn trẻ thường xuyên nghe nhạc mạnh.

Hướng dẫn

Ta có mức cường độ âm của tiếng nhạc mạnh phát ra từ loa là:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log(7 \times 10^8) \approx 89 \text{ (dB)}.$$

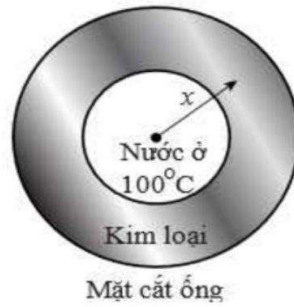
Vì nếu thường xuyên nghe tiếng ồn có mức cường độ âm khoảng 90 dB thì có nguy cơ bị giảm thính lực, thậm chí bị điếc mà mức cường độ âm của tiếng nhạc mạnh phát ra từ loa là khoảng 89 dB nên các bạn trẻ không nên thường xuyên nghe nhạc mạnh bởi có thể bị giảm thính lực hoặc bị điếc.

Bài toán 2: Các cây hoa cẩm tú cầu mặc dù cùng một kiểu gen, nhưng màu hoa có thể biểu hiện ở các dạng trung gian khác nhau phụ thuộc vào độ pH của đất. Muốn hoa có màu xanh thì phải trồng trên đất có $[H^+]$ như thế nào? Biết hoa có màu xanh trong môi trường đất chua, có $3 < pH < 5$ và $pH = -\log[H^+]$.

Hướng dẫn

Ta có $\log 3 < -\log [H^+] < \log 5 \Leftrightarrow 10^{-5} < [H^+] < 10^{-3}$.

Bài toán 3: Mặt cắt ngang của một ống dẫn nước nóng là hình vành khuyên như hình vẽ sau:



Bán kính ngoài là r cm và bán kính trong là 2 cm ($r > 2$). Bên trong ống, nhiệt độ nước được duy trì ở mức 100°C . Bên trong kim loại, nhiệt độ giảm dần từ bên trong ra bên ngoài. Biết rằng nhiệt độ $T(^{\circ}\text{C})$ tại điểm A trên thành ống là hàm số của khoảng cách x (cm) từ A đến tâm của mặt cắt và thoả mãn $T'(x) = -\frac{10}{x}$, với $2 \leq x \leq r$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) $T(x) = -10\ln x + C$ với C là hằng số.

b) $T(x) = 100 - 10\ln \frac{2}{x}$.

c) Nếu bán kính ngoài là $r = 4$ cm thì nhiệt độ bề mặt ngoài của ống là $93,1^\circ\text{C}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của $^\circ\text{C}$).

d) Để nhiệt độ bề ngoài của ống không vượt quá 90°C thì ta nên thiết kế ống với bán kính ngoài tối thiểu là 5,5 cm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm).

Hướng dẫn

a) Đúng: Nhiệt độ tại điểm A trên thành ống là

$$T(x) = \int \left(-\frac{10}{x} \right) dx = -10\ln|x| + C = -10\ln x + C.$$

b) Sai: Ta có $T(2) = 100 \Leftrightarrow -10\ln 2 + C = 100 \Leftrightarrow C = 100 + 10\ln 2$

$$\Rightarrow T(x) = -10\ln x + 100 + 10\ln 2 = 100 + 10\ln \frac{2}{x}.$$

c) Sai: Nhiệt độ ngoài mặt ống là $T(4) = 100 + 10\ln \frac{2}{4} \approx 93,07^\circ \text{C}$.

d) Đúng:

$$\text{Ta có: } T(x) \leq 90 \Leftrightarrow 100 + 10\ln \frac{2}{x} \leq 90 \Leftrightarrow \ln \frac{2}{x} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{2}{x} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow x \geq 2e.$$

Vậy để nhiệt độ bề ngoài của ống không vượt quá 90°C thì ta nên thiết kế ống với bán kính ngoài tối thiểu là $5,5 \text{ cm}$.

Bài toán 4: Một miếng thịt sống được lấy ra khỏi ngăn đá của tủ lạnh và để trên bàn để rã đông. Nhiệt độ của miếng thịt khi nó được lấy ra khỏi ngăn đá là -4°C và sau t giờ nhiệt độ của miếng thịt tăng với tốc độ $T'(t) = 7e^{-0,35t} \text{ }^\circ \text{C} / \text{giờ}$.

Miếng thịt này được rã đông khi nhiệt độ của nó đạt đến 10°C . Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Sau 2 giờ tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt bằng $3,48^\circ \text{C} / \text{giờ}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị $^\circ \text{C} / \text{giờ}$).

b) Nhiệt độ của miếng thịt bằng 0°C sau 43 phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).

c) Cần mất 2,44 giờ để miếng thịt nướng được rã đông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của giờ).

d) Sau khi rã đông được 2 tiếng, miếng thịt được đem đi nướng trong lò vi sóng. Tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt trong lò vi sóng sau t giờ được xác định bởi hàm số $L'(x) = 80e^{0,2t} \text{ }^\circ \text{C} / \text{giờ}$. Miếng thịt được coi là chín đều nếu nhiệt độ của nó là 77°C . Thời gian để nướng chín đều miếng thịt là 48 phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).

Hướng dẫn

a) Đúng: Tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt sau 2 giờ là:
 $T'(2) = 7e^{-0,35 \cdot 2} \approx 3,48^\circ \text{C} / \text{h}$.

b) Sai: Nhiệt độ của miếng thịt sau t giờ là:

$$T(t) = \int T'(t) dt = \int 7e^{-0,35t} dt = \frac{7}{-0,35} e^{-0,35t} + C = -20e^{-0,35t} + C.$$

Nhiệt độ của miếng thịt khi nó được lấy ra khỏi ngăn đá là

$$T(0) = -4 \Leftrightarrow -20e^{-0,35 \cdot 0} + C = -4 \Leftrightarrow C = 16 \Rightarrow T(t) = -20e^{-0,35t} + 16.$$

Ta có: $T = 0 \Leftrightarrow -20e^{-0,35t} + 16 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,35t} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow -0,35t = \ln \frac{4}{5}$
 $\Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,35} \ln \frac{4}{5} \approx 0,64 \text{ h} \approx 38 \text{ phút.}$

Vậy nhiệt độ của miếng thịt bằng 0°C sau 38 phút.

c) Sai: Ta có: $T = 10 \Leftrightarrow -20e^{-0,35t} + 16 = 10 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,35} \ln \frac{3}{10} \approx 3,44 \text{ h.}$

Vậy cần mất 3,44 giờ để miếng thịt nướng được rã đông.

d) Sai: Nhiệt độ của miếng thịt sau t giờ đưa vào lò vi sóng là

$$L(t) = \int L'(t) dt = \int 80e^{0,2t} dt = \frac{80}{0,2} e^{0,2t} + C = 400e^{0,2t} + C.$$

Thời điểm miếng thịt được đưa vào lò vi sóng là $t_1 = t + 2 = 3,44 + 2 = 5,44 \text{ (h)}.$

Nhiệt độ của miếng thịt lúc đưa vào lò vi sóng là $L(0) = T(5,44) = -20 \cdot e^{-0,35 \cdot 5,44} + 16 \approx 13,0205.$

Ta có: $L(0) = 13,0205 \Leftrightarrow 400e^{0,2 \cdot 0} + C = 13,0205 \Leftrightarrow C = -386,9795$

$$\Rightarrow L(t) = 400e^{0,2t} - 386,9795.$$

Ta có: $L(t) = 400e^{0,2t} - 386,9795 = 77 \Leftrightarrow e^{0,2t} = \frac{463,9795}{400}$

$$\Leftrightarrow 0,2t = \ln \frac{463,9795}{400} \Leftrightarrow t = \frac{1}{0,2} \ln \frac{463,9795}{400} \approx 0,74 \text{ (h)} \approx 45 \text{ phút.}$$

Bài toán 5: Nếu D_0 là chênh lệch nhiệt độ ban đầu giữa một vật M và các vật xung quanh, và nếu các vật xung quanh có nhiệt độ T_s , thì nhiệt độ của vật M tại thời điểm t được mô hình hóa bởi hàm số $T(t) = T_s + D_0 \cdot e^{-kt}$ (1) (trong đó k là hằng số dương phụ thuộc vào vật M). Một con gà tây nướng được lấy từ lò nướng khi nhiệt độ của nó đã đạt đến 195°F và được đặt trên một bàn trong một căn phòng có nhiệt độ là 65°F . Nếu nhiệt độ của gà tây là 150°F sau nửa giờ, nhiệt độ của nó sau 60 phút là bao nhiêu độ F? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn

Ta có $T_s = 65$ và độ chênh lệch nhiệt độ là $D_0 = 195 - 65 = 130.$

Sau nửa giờ ($t = 0,5$) thì nhiệt độ của gà là $T = 150$.

$$\text{Áp dụng công thức (1): } 150 = 65 + 130 \cdot e^{-k(0,5)} \Leftrightarrow e^{-k} = \left(\frac{17}{26}\right)^2.$$

$$\text{Vậy } T(t) = 65 + 130 \cdot \left(\frac{17}{26}\right)^{2t}.$$

$$\text{Suy ra nhiệt độ của gà sau 60 phút } (t = 1 \text{ giờ}) \text{ là } 65 + 130 \cdot \left(\frac{17}{26}\right)^{2,1} \approx 121^0 \text{ F}.$$

Bài toán 6: Trong Vật lí, sự phân rã các chất phóng xạ được cho bởi công thức

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}. \text{ Trong đó } m_0 \text{ là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm } t = 0), m(t) \text{ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm } t \text{ và } T \text{ là chu kỳ bán rã.}$$

Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kỳ bán rã 138 ngày. Giả sử lúc đầu có 100 Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến phần nghìn).

Hướng dẫn

$$\text{Khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày là } m(100) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{138}} \approx 60,515 \text{ (g)}.$$

Bài toán 7: Trên một chiếc đài Radio FM có vạch chia để người dùng có thể dò sóng cần tìm. Vạch ngoài cùng bên trái và vạch ngoài cùng bên phải tương ứng với 88 Mhz và 108 Mhz. Hai vạch này cách nhau 10 cm. Biết vị trí của vạch cách vạch ngoài cùng bên trái d (cm) thì có tần số bằng $k.a^d$ (Mhz) với k và a là hai hằng số. Tìm vị trí tốt nhất của vạch để bắt sóng VOV_1 với tần số 102,7 Mhz.

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } d = 0 \Rightarrow k.a^0 = 88 \Rightarrow k = 88.$$

$$d = 10 \Rightarrow k.a^{10} = 108 \Rightarrow 88.a^{10} = 108 \Rightarrow a^{10} = \frac{108}{88} \Rightarrow a = \sqrt[10]{\frac{108}{88}}.$$

Gọi d_1 là vị trí để vạch có tần số 102,7 Mhz, khi đó ta có:

$$88. \left(\sqrt[10]{\frac{108}{88}} \right)^{d_1} = 102,7 \Leftrightarrow \left(\sqrt[10]{\frac{108}{88}} \right)^{d_1} = \frac{102,7}{88} \Leftrightarrow d_1 = 7,54.$$

Vậy vị trí tốt nhất của vạch để bắt sóng VOV₁ với tần số 102,7 Mhz là 7,54 cm.

Bài toán 8: Công thức tìm độ pH của một dung dịch hóa học $pH = -\log[H^+]$, với $[H^+]$ là nồng độ (mol/lít) của các ion hydrogen. Để lấy ra một dung dịch X có độ pH lớn hơn 7 thì người ta cần chọn dung dịch có nồng độ (mol/lít) của các ion hydrogen nào dưới đây?

A. 0,0000001 mol/lít.

B. 0,00000001 mol/lít.

C. 0,000001 mol/lít.

D. 0,0000002 mol/lít.

Hướng dẫn

Đáp án A: $[H^+] = 0,0000001$ nên $pH = -\log 10^{-7} = 7$ (không thỏa).

Đáp án B: $[H^+] = 0,00000001$ nên $pH = -\log 10^{-8} = 8 > 7$ (thỏa).

Đáp án C: $[H^+] = 0,000001$ nên $pH = -\log 10^{-6} = 6 < 7$ (không thỏa).

Đáp án D: $[H^+] = 0,0000002 \Rightarrow pH = -\log(2 \cdot 10^{-7}) < 7$ (không thỏa).

Bài toán 9: Áp suất không khí P (đo bằng mmHg) giảm theo độ cao x (đo bằng m) tại khu vực đỉnh Fansipan của Việt Nam được tính theo công thức: $P = P_0 \cdot e^{x \cdot i}$. Trong đó $P_0 = 760$ mmHg là áp suất ở mực nước biển ứng với $x = 0$ và i là hệ số suy giảm áp suất. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 668 mmHg. Hỏi áp suất của không khí tại đỉnh Fansipan bằng bao nhiêu biết rằng đỉnh Fansipan ở độ cao 3140 m so với mực nước biển?

A. 502,58(mmHg).

B. 508,25(mmHg).

C. 505,28(mmHg).

D. 500,5(mmHg).

Hướng dẫn

Áp dụng công thức $P = P_0 \cdot e^{x \cdot i}$.

Ở độ cao 1000 m ta có $P_0 = 760$ mmHg, $x = 1000$ m, $P = 668$ mmHg.

Thay vào công thức ta tìm được hệ số suy giảm áp suất:

$$668 = 760 \cdot e^{1000 \cdot i} \Leftrightarrow 1000i = \ln\left(\frac{668}{760}\right) \Leftrightarrow i \approx -0,00013.$$

Khi đó, ở độ cao 3140 m, áp suất của không khí là:
 $P = 760.e^{-0,00013.3140} \approx 505,28 \text{ (mmHg)}.$

Vậy áp suất tại đỉnh Fansipan vào khoảng $P = 505,28 \text{ (mmHg)}.$

Bài toán 10: Một quần thể vi khuẩn (A) có số lượng cá thể là $P(t)$ sau t phút quan sát được phát hiện thay đổi với tốc độ là: $P'(t) = ae^{0,1t} + 150e^{-0,03t}$ ($a \in \mathbb{R}$). Biết rằng lúc bắt đầu quan sát, quần thể có 200.000 vi khuẩn và đạt tốc độ tăng trưởng là 350 vi khuẩn/phút. Các khẳng định sau đúng hay sai?



a) Giá trị của $a = 200$.

b) $P(t) = 2000e^{0,1t} - 5000e^{-0,03t} + 200000$.

c) Sau 12 phút số lượng vi khuẩn trong quần thể là 206152 con (làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Sau 12 phút, có một quần thể vi khuẩn (B) xuất hiện, cạnh tranh thức ăn với quần thể vi khuẩn (A) và có tốc độ tăng trưởng là $G'(t) = 500e^{0,2t}$ (vi khuẩn/phút). Sau 5 phút vi khuẩn (B) xuất hiện thì số lượng vi khuẩn hai quần thể bằng nhau. Số lượng vi khuẩn của quần thể (B) ở thời điểm bắt đầu cạnh tranh là 191967 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn

a) Đúng: $P'(0) = a + 150 = 350 \Rightarrow a = 200$.

b) Sai: $P(t) = \int P'(t) dt = 2000e^{0,1t} - 5000e^{-0,03t} + C$.

Lại có $P(0) = 200000$, suy ra $-3000 + C = 200000 \Rightarrow C = 203000$.

Vậy $P(t) = 2000e^{0,1t} - 5000e^{-0,03t} + 203000$.

c) Đúng: $P(12) = 2000e^{0,1.12} - 5000e^{-0,03.12} + 203000 = 206152$.

d) Sai: Sau 5 phút vi khuẩn (B) xuất hiện thì số lượng vi khuẩn hai quần thể bằng nhau. Nên số lượng quần thể (A) ở phút thứ 17 bằng số lượng quần thể (B) ở phút thứ 5. Tức là $P(17) = G(5)$ (1)

$$P(17) = 2000e^{0,1.17} - 5000e^{-0,03.17} + 203000 = 210945$$

$$\text{Ta có } G(t) = \int G'(t) dt = 2500e^{0,2t} + C \Rightarrow G(5) = 2500e + C.$$

$$\text{Từ (1) ta có } 2500e + K = 210945 \Rightarrow K = 204149.$$

$$\Rightarrow G(t) = 2500e^{0,2t} + 204149 \Rightarrow G(0) = 206649.$$

Bài toán 11: Khi đun nước, nhiệt độ ban đầu của nước trong ấm là 20^0 C và tăng dần với tốc độ $T'_1 = 75e^{-t}$ ($^0\text{ C} / \text{phút}$) ($t \geq 0$), trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bếp được bật lên. Khi nước trong ấm đạt 85^0 C thì bếp được tắt đi và nhiệt độ $T^0\text{ C}$ của nước trong ấm khi này xác định theo công thức

$T_2 = 15 + a \cdot e^{-\frac{t}{20}}$ ($t \geq 0$), trong đó a là hằng số và t (phút) là thời gian tính từ lúc tắt bếp. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $T_1 = -75e^{-t} + C$ với C là hằng số.

b) Giá trị của a bằng 85.

c) Sau khoảng 120 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của giây) kể từ lúc bật bếp thì nước trong ấm đạt 85^0 C .

d) Sau khoảng 21 phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) kể từ lúc bật bếp thì nhiệt độ của nước trong ấm giảm xuống tới 40^0 C .

Hướng dẫn

a) Đúng: $T_1 = \int 75e^{-t} dt = -75e^{-t} + C$ với C là hằng số.

Vì nhiệt độ ban đầu là 20^0 C nên $T_1(0) = -75 + C = 20 \Rightarrow C = 95$

$$\Rightarrow T_1 = -75e^{-t} + 95.$$

b) Sai: Vì khi nước trong ấm đạt 85^0 C thì bếp được tắt đi nên ta có:

$$T_2(0) = 15 + a \cdot e^{-\frac{0}{20}} = 85 \Rightarrow a = 70.$$

c) Đúng: Ta có: $T_1(2) \approx 85$.

d) Sai: Theo câu (c) ta có sau 2 phút kể từ khi mở bếp thì nước trong ấm đạt nhiệt độ 85^0C . Sau đó thì nhiệt độ của nước trong ấm sẽ tính theo công thức

$$T_2 = 15 + 70.e^{\frac{-t}{20}}.$$

$\Rightarrow$ Sau 21 phút kể từ khi bật bếp thì nhiệt độ của ấm là $T_2(19) \approx 42^0\text{C}$.

Bài toán 12: Ở nhiệt độ 37^0C , một phản ứng hóa học từ chất đầu A , chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị $\text{mol } L^{-1}$) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4}y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05 \text{ mol } L^{-1}$. Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $f'(x) = -7 \cdot 10^{-4}$.

b) $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$.

c) $y(30) - y(15) = -6 \cdot 10^{-4}$.

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng 0,05.

Hướng dẫn

a) Đúng: Ta có: $f'(x) = (\ln y(x))' = \frac{y'(x)}{y(x)} = -7 \cdot 10^{-4}$

b) Đúng: Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (-7 \cdot 10^{-4}) dx = -7 \cdot 10^{-4}x + C$.

Theo giả thiết $y(0) = 0,05$ nên $f(0) = \ln y(0) = \ln(0,05)$.

Khi đó $C = \ln(0,05)$.

Vậy $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$.

c) Sai: Từ $f(x) = \ln y(x) \Rightarrow y(x) = e^{f(x)} = e^{-7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)} = \frac{1}{20}e^{-7 \cdot 10^{-4}x}$.

Do đó $y(30) - y(15) = \frac{1}{20}(e^{-7 \cdot 10^{-4} \cdot 30} - e^{-7 \cdot 10^{-4} \cdot 15}) \approx -5,2 \cdot 10^{-4}$.

d) Đúng: Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\begin{aligned}\frac{1}{30-15} \int_{15}^{30} y(x) dx &= \frac{1}{15} \int_{15}^{30} \left(-\frac{1}{7 \cdot 10^{-4}} \right) y'(x) dx \\ &= -\frac{10^4}{105} y(x) \Big|_{15}^{30} = -\frac{10^4}{105} [y(30) - y(15)] \approx 0,05\end{aligned}$$

Bài toán 13: Một con sư tử đang đuổi theo một con ngựa vằn. Con ngựa vằn nhận ra con sư tử khi con sư tử cách xa nó 40 m. Từ thời điểm này, con sư tử đuổi con ngựa vằn với tốc độ $v_1(t) = 15e^{-0,1t}$ m/s và con ngựa vằn chạy trốn với tốc độ $v_2(t) = 20 - 20e^{-0,1t}$ m/s trên cùng một đường thẳng (với t tính theo giây và $0 \leq t \leq 60$).



Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ vận tốc của con ngựa vằn là 20 m/s.
- b) Tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian, trong khi tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.
- c) Sư tử sẽ ở gần ngựa vằn nhất khi $v'_1(t) = v'_2(t)$.
- d) Sư tử sẽ không bắt được con ngựa vằn và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,42 m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn

a) Sai: Khi $t = 0$, vận tốc của con ngựa vằn là $v_2(0) = 20 - 20e^{-0,1 \cdot 0} = 0$.

b) Đúng:

□) Ta có $v'_1(t) = -0,1 \cdot 15 \cdot e^{-0,1t} < 0, \forall t \in [0; 60]$

Suy ra tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian.

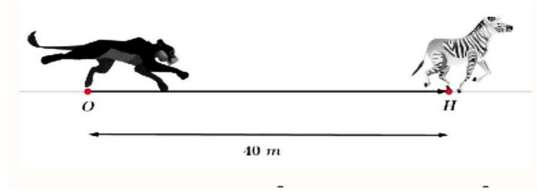
□) Ta có $v'_2(t) = -0,1 \cdot (-20) \cdot e^{-0,1t} = 2 \cdot e^{-0,1t} > 0, \forall t \in [0; 60]$

Suy ra tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.

Vậy tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian, trong khi tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.

c) Sai: vì $\begin{cases} v_1'(t) < 0, & \forall t \in [0; 60] \\ v_2'(t) > 0, & \forall t \in [0; 60] \end{cases} \Rightarrow v_1'(t) \neq v_2'(t), \forall t \in [0; 60]$.

d) Sai: Gọi quãng đường chạy được của sư tử và ngựa vằn lần lượt là $s_1(t), s_2(t)$ (m).



+) Ta có: $s_1(t) = \int v_1(t) dt = \int 15e^{-0,1t} dt = \frac{15}{-0,1} e^{-0,1t} + C = -150e^{-0,1t} + C$.

Coi điểm O là vị trí xuất phát ban đầu, tại thời điểm xuất phát ($t = 0$) quãng đường mà sư tử chạy được bằng 0 $\Leftrightarrow s_1(0) = 0 \Leftrightarrow -150e^{-0,1 \cdot 0} + C = 0 \Rightarrow C = 150$.

Vậy $s_1(t) = -150e^{-0,1t} + 150$.

+) Ta có $s_2(t) = \int v_2(t) dt = \int (20 - 20e^{-0,1t}) dt = 20t - \frac{20}{-0,1} e^{-0,1t} + C$
 $= 20t + 200e^{-0,1t} + C$.

So với vị trí xuất phát ban đầu O , tại thời điểm $t = 0$ ngựa vằn chạy được quãng đường là 40 m $\Rightarrow s_2(0) = 40 \Leftrightarrow 20 \cdot 0 + 200e^{-0,1 \cdot 0} + C = 40 \Leftrightarrow C = -160$.

Vậy $s_2(t) = 20t + 200e^{-0,1t} - 160$.

Suy ra khoảng cách giữa sư tử và ngựa vằn là $d(t) = s_2(t) - s_1(t)$

$= 20t + 200e^{-0,1t} - 160 - (-150e^{-0,1t} + 150) = 20t + 350e^{-0,1t} - 310$.

*) Xét hàm số $d(t)$ trên đoạn $[0; 60]$. Ta có $d'(t) = s_2'(t) - s_1'(t) = v_2(t) - v_1(t)$

$d'(t) = 0 \Leftrightarrow v_2(t) = v_1(t) \Leftrightarrow 20 - 20e^{-0,1t} = 15e^{-0,1t}$

$\Leftrightarrow 20 = 35e^{-0,1t} \Leftrightarrow \frac{20}{35} = e^{-0,1t} \Leftrightarrow \ln \frac{20}{35} = -0,1t \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{20}{35}}{-0,1} \approx 5,6$.

Bảng biến thiên:

t	0	5, 6	60
$d'(t)$	-	0	+
$d(t)$	40		890, 87
		1, 92	

Vậy sự tử ở gần ngựa vẫn nhất khi $v_1(t) = v_2(t)$ và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,92 mét.

Bài toán 14: Tốc độ trao đổi chất cơ bản của sinh vật có thể tăng hoặc giảm tùy thuộc vào hoạt động của sinh vật. Cụ thể, sau khi hấp thụ chất dinh dưỡng, sinh vật thường trải qua một sự tăng đột biến trong tốc độ trao đổi chất của nó, sau đó dần dần trở lại mức cơ bản.

Linh vừa kết thúc bữa tối trong buổi sinh nhật của mình với năng lượng nạp vào là 5120 J và tốc độ trao đổi chất của cô đã tăng đột biến từ mức cơ bản M_0 .

Sau đó cô đã tiêu hao hết năng lượng đó trong 12 giờ tiếp theo. Giả sử t giờ sau bữa ăn Linh tiêu hao được $M(t)$ kJ, tốc độ trao đổi chất của cô được cho bởi hàm số $M'(t) = M_0 + te^{-0,1t^2}$ (kJ/h), $t \in [0; 12]$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $M(t) = M_0 t - 5e^{-0,1t^2} + C$ là họ nguyên hàm của hàm số $M'(t)$.

b) $M_0 = 0,01$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

c) Năng lượng còn lại sau 6 giờ đầu là 197 J (làm tròn đến hàng đơn vị)

d) Tốc độ tiêu hao năng lượng trung bình trong khoảng thời gian từ (giờ) đến (giờ) được tính bởi công thức $v_{tb} = \frac{M(b) - M(a)}{b - a}$. Tốc độ tiêu hao năng lượng trung bình từ 6 giờ đến 12 giờ của Linh là 32,76 J/h (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn

a) Đúng: Ta có công thức $\int M'(t) dt = M(t)$. Nên để kiểm tra tính đúng sai của phần (a), thay vì nguyên hàm $M'(t)$ ta sẽ đạo hàm $M(t)$ và kiểm tra xem nó có đúng bằng $M'(t)$ đã được cho ở đề bài không.

$$M'(t) = (M_0 t - 5e^{-0,1t^2} + C)' = M_0 - 5(-0,1 \cdot 2t)e^{-0,1t^2} = M_0 + te^{-0,1t^2}.$$

Vậy $M(t) = M_0 t - 5e^{-0,1t^2} + C.$

b) Đúng: Vì sau 0 giờ thì Linh tiêu hao được 0kJ nên ta có

$$M(0) = 0 \Leftrightarrow M_0 \cdot 0 - 5e^{-0,1 \cdot 0^2} + C = 0 \Leftrightarrow C = 5 \Rightarrow M(t) = M_0 t - 5e^{-0,1t^2} + 5.$$

Theo giả thiết $M(12) = 5,120 \Leftrightarrow 12M_0 - 5e^{-0,1 \cdot 12^2} + 5 = 5,12 \Leftrightarrow M_0 \approx 0,01$
 $\Rightarrow M(t) = 0,01t - 5e^{-0,1t^2} + C.$

c) Đúng: Năng lượng Linh tiêu hao sau 6 giờ đầu là $M(6) = 0,01 \cdot 6 - 5e^{-0,1 \cdot 6^2} + 5 \approx 4,923 \text{ (kJ)} = 4923 \text{ J}.$

Vậy năng lượng còn lại sau 6 giờ đầu là $M(12) - M(6) = 5120 - 4923 = 197 \text{ (J)}.$

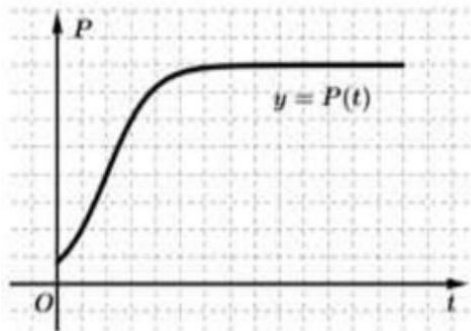
d) Sai: Tốc độ tiêu hao năng lượng trung bình từ 6 giờ đến 12 giờ của Linh là

$$v_{tb} = \frac{M(12) - M(6)}{12 - 6} = \frac{5,120 - (0,01 \cdot 6 - 5e^{-0,1 \cdot 6^2} + 5)}{6} \approx 32,77 \text{ (J/h)}.$$

Bài toán 15: Một hồ nước ở Bắc Ontario đã phục hồi sau một vụ tràn axit khiến tất cả cá hồi ở đó chết. Một chương trình tái thả cá đã thả 800 con cá hồi vào hồ. Ba năm sau, số lượng được ước tính là 6000 con. Sức chứa của hồ được cho là 8000 con. Để đánh giá khả năng tăng trưởng, người ta mô phỏng số lượng cá trong

hồ qua từng năm thông qua hàm số $P(t) = \frac{c}{1 + a \cdot b^{-t}} (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như

hình vẽ bên (trong đó tính theo năm kể từ lúc bắt đầu thả cá vào hồ). Sử dụng mô hình trên, hãy tính tốc độ tăng trưởng tối đa (đơn vị con/năm) của đàn cá (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn

Dựa vào dữ kiện đề bài, ta có:

$$+) P(0) = 800 \Leftrightarrow \frac{c}{1 + a \cdot b^{-0}} = 800 \Leftrightarrow \frac{c}{1 + a} = 800.$$

$$+) P(3) = 6000 \Leftrightarrow \frac{c}{1 + a \cdot b^{-3}} = 6000.$$

$$+) \text{ Sức chứa của hồ là 8000 con } \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 8000.$$

$$\text{Khi } t \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} b < 1 \Rightarrow b^{-t} \rightarrow +\infty (L) \\ b > 1 \Rightarrow b^{-t} \rightarrow 0 (tm) \end{cases} \Rightarrow P(t) \rightarrow c.$$

$$\text{Khi đó } \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = c = 8000. \text{ Mà } \frac{c}{1 + a} = 800 \Leftrightarrow \frac{8000}{1 + a} = 800 \Rightarrow a = 9.$$

$$\text{Thay vào } c = 8000 \text{ và } a = 9 \text{ phương trình } \frac{c}{1 + a \cdot b^{-3}} = 6000 \text{ ta được}$$

$$\frac{8000}{1 + 9 \cdot b^{-3}} = 6000 \Leftrightarrow 1 + 9 \cdot b^{-3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow b^{-3} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow b = 3.$$

$$\text{Suy ra } P(t) = \frac{8000}{1 + 9 \cdot 3^{-t}}. \text{ Hàm số } P'(t) \text{ là tốc độ tăng trưởng của đàn cá.}$$

$$\text{Suy ra tốc độ tăng trưởng tối đa của đàn cá} = P'(t)_{\max}.$$

$$P'(t) = -8000 \cdot \frac{-9 \cdot 3^{-t} \cdot \ln 3}{(1 + 9 \cdot 3^{-t})^2} = 79100 \cdot \frac{3^{-t}}{(1 + 9 \cdot 3^{-t})^2}.$$

$$\text{Để tìm max của } P'(t) \text{ ta làm như sau: Ta tìm max của } g(t) = \frac{3^{-t}}{(1 + 9 \cdot 3^{-t})^2}.$$

$$\text{Đặt } 3^{-t} = a (a > 0) \Rightarrow g(t) = \frac{a}{(1 + 9a)^2} = \frac{a}{1 + 18a + 81a^2} = \frac{1}{\frac{1}{a} + 18 + 81a}$$

$$\text{Nhận xét: } g(t)_{\max} \text{ khi } \frac{1}{a} + 18 + 81a \text{ min.}$$

$$\text{Áp dụng cosi cho 2 số dương } \frac{1}{a} \text{ và } 81a, \text{ ta có:}$$

$$\frac{1}{a} + 81a \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot 81a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + 81a \geq 2\sqrt{81} = 18 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{a} + 18 + 81a} \leq \frac{1}{36}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{1}{a} = 81a \Leftrightarrow 81a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}$.

Khi đó $P'(t)_{\max} = 79100 \cdot \frac{1}{36} \approx 2197$.

Bài toán 16: Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác định được nó mất 25% lượng Cacbon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó bao nhiêu tiêu, biết chu kì bán rã của ^{14}C là 5730 năm.

A. 2378 năm. B. 11460 năm. C. 2371 năm. D. 11461 năm.

Hướng dẫn

Giả sử thời điểm ban đầu thì mẫu đồ cổ có chứa lượng Cacbon là m_0 và tại thời điểm t (tính từ thời điểm ban đầu), khối lượng đó là $m(t)$ thì ta có:

$$m(t) = m_0 \cdot e^{\frac{-\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow 75\% \cdot m_0 = m_0 \cdot e^{\frac{-\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow t = \frac{5730 \ln \frac{3}{4}}{-\ln 2} \approx 2378 \text{ năm.}$$

Bài toán 17: Trong tin học, độ hiệu quả của một thuật toán tỉ lệ thuận với thời gian thực thi chương trình tương ứng và được tính theo công thức $E(n) = \frac{n}{P(n)}$

với n là số lượng dữ liệu đưa vào và $P(n)$ là độ phức tạp của thuật toán ứng với giá trị n . Biết rằng một thuật toán có độ phức tạp là $P(n) = \log_2 n$ và khi $n = 300$ thì để chạy nó, máy tính mất 0,02 giây. Hỏi khi $n = 90000$ thì phải mất bao lâu để thực thi chương trình tương ứng?

A. 3 giây. B. 2 giây. C. 1 giây. D. 0,06 giây.

Hướng dẫn

Nhận xét:

+ Thời gian tỉ lệ thuận với độ hiệu quả.

+ Cho thời gian khi $n = 300$, tính thời gian khi $n = 90000$. Vậy chúng ta dùng biểu thức tỉ lệ, từ đó tìm ra thời gian chạy khi $n = 90000$.

Với $n = 300$ thì độ hiệu quả của thuật toán là $E(300) = \frac{300}{\log_2 300}$.

Với $n = 90000$ thì độ hiệu quả của thuật toán là $E(90000) = \frac{90000}{\log_2 90000} = \frac{300^2}{\log_2 300^2} = \frac{300}{2} \cdot \frac{300}{\log_2 300} = 150 \cdot E(300)$.

Vì tốc độ chạy của chương trình tỉ lệ thuận với độ hiệu quả của thuật toán nên ta

$$\text{có } \frac{t}{0,02} = \frac{E(300).150}{E(300)} \Rightarrow t = 3 \text{ giây.}$$

Bài toán 18: Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỉ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, một trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richter. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

- A. 1000 lần. B. 10 lần. C. 2 lần. D. 100 lần.

Hướng dẫn

Nhận thấy ở San Francisco trận động đất có cường độ là

$$M_1 = \log A_1 - \log A_0 = \log \frac{A_1}{A_0} = 8.$$

Ở Nhật Bản, trận động đất có cường độ là $M_2 = \log \frac{A_2}{A_0} = 6$.

$$\text{Khi đó, trừ vế ta được } \log \frac{A_1}{A_0} - \log \frac{A_2}{A_0} = 8 - 6 \Leftrightarrow \log \frac{A_1}{A_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = 100.$$

Bài toán 19: Cường độ ánh sáng đi qua một môi trường không khí, chẳng hạn như nước, sương mù,... sẽ giảm dần tùy theo mức độ dày của môi trường và hằng số μ gọi là khả năng hấp thụ tùy thuộc môi trường theo công thức như sau:

$I = I_0.e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó và tính bằng mét. Biết rằng môi trường nước biển có $\mu = 1,4$. Hãy tính xem cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần từ độ sâu 2 m xuống độ sâu 20 m?

- A. $e^{-25,2}$. B. $e^{25,2}$. C. $e^{12,6}$. D. $e^{-12,6}$.

Hướng dẫn:

Nhận xét: Đây là bài toán yêu cầu tìm tỉ lệ giữa cường độ ánh sáng giữa hai độ sâu. Sau đó kiểm tra cách rút gọn biểu thức lũy thừa.

- Ở độ sâu 2 m thì cường độ ánh sáng là $I_1 = I_0.e^{-\mu.2}$.

- Ở độ sâu 20 m thì cường độ ánh sáng là $I_2 = I_0.e^{-\mu.20}$.

Khi đó ta có tỉ số $\frac{I_1}{I_2} = \frac{e^{-2\mu}}{e^{-20\mu}} = \frac{e^{-2\mu}}{(e^{-2\mu})^{10}} = e^{18\mu} = e^{25,2}$.

Bài toán 20: Cho một chất Uranium phóng xạ có tỉ lệ phóng xạ hàng ngày là $-0,4\%$ tức là khối lượng của nó giảm $0,4\%$ mỗi ngày. Khối lượng của chất đó sau n ngày được tính theo công thức $M = M_0 \cdot e^{ni}$, trong đó M_0 là khối lượng ngày đầu, i là tỉ lệ phóng xạ hàng ngày. Hỏi sau 50 ngày phóng xạ, 30 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu?

Hướng dẫn

Áp dụng công thức ta có $M = 30 \cdot e^{-0,004 \cdot 50} \approx 24,5619 \text{ (g)}$.

Bài toán 21: Nhảy dù là môn thể thao hành động bao gồm nhảy ra khỏi một chiếc máy bay hay dụng cụ bay khác ở trên không trung và rơi trở về Trái Đất với sự trợ giúp của lực hấp dẫn trong khi sử dụng một chiếc dù nhảy để làm chậm sự chuyển động của một đối tượng thông qua một bầu không khí bằng cách tạo ra lực kéo, nâng khí động học.

Một người nhảy dù ở bãi biển Đà Nẵng, biết rằng độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức áp suất theo độ cao là $a = 199 \cdot \left(\frac{7}{2} - \log p \right)$, trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng Pa). Tính độ cao so với mực nước biển, biết áp suất ở nơi người đó đang ở vị trí trên không trung là 2500 Pa, biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần trăm.



Hướng dẫn

Ta có $a = 199 \cdot \left(\frac{7}{2} - \log p \right) = 199 \cdot \left(\frac{7}{2} - \log 2500 \right) \Leftrightarrow a \approx 20,31 \text{ m}$.

Bài toán 22: Ruồi giấm được thả vào bình sữa nửa lít cùng với một quả chuối (để làm thức ăn) và cây men (để làm thức ăn và để kích thích đẻ trứng). Giả sử rằng

số lượng ruồi đục quả sau t ngày được cho bởi công thức $P(t) = \frac{230}{1 + 56,5e^{-0,37t}}$.

Mất bao lâu để trong bình có 180 con ruồi giấm?

Hướng dẫn

Để xác định khi nào số lượng ruồi giấm sẽ là 180, ta giải phương trình

$$\begin{aligned} P(t) = 180 &\Leftrightarrow \frac{230}{1 + 56,5e^{-0,37t}} = 180 \\ &\Leftrightarrow 230 = 180(1 + 56,5e^{-0,37t}) \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{18.56,5} = e^{-0,37t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{1017}\right) = -0,37t \Leftrightarrow t \approx 14,4 \text{ ngày.} \end{aligned}$$

Vậy mất khoảng 14,4 ngày để số lượng ruồi giấm đạt tới 180 con.

Bài toán 23: Một vật được làm nóng đến $u_0 = 100^0\text{C}$ và sau đó được làm mát trong phòng có nhiệt độ không khí là $T = 30^0\text{C}$. Nhiệt độ của vật được làm mát tại một thời điểm t (tính bằng phút) có thể được mô hình hóa bằng công thức $u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt}$ với k là hằng số. Nếu nhiệt độ của vật là 80^0C sau 5 phút thì sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại là 50^0C ?

Hướng dẫn

Với $T = 30$ và $u_0 = 100$, nhiệt độ $u(t)$ của vật tại thời điểm t (tính bằng phút) là:

$$u(t) = 30 + (100 - 30)e^{kt} = 30 + 70e^{kt}.$$

Theo đề bài ta có: $u(5) = 30 + 70e^{k \cdot 5} \Leftrightarrow 80 = 30 + 70e^{5k}$

$$\Leftrightarrow e^{5k} = \frac{50}{70} \Leftrightarrow 5k = \ln \frac{5}{7} \Leftrightarrow k = \frac{1}{5} \ln \frac{5}{7} \approx -0,0673.$$

Do đó ta có: $u(t) = 30 + 70e^{-0,0673t}$.

Cho nên $u(t) = 50^0\text{C} \Leftrightarrow 50 = 30 + 70e^{-0,0673t} \Leftrightarrow 20 = 70e^{-0,0673t}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{-0,0673t} &= \frac{20}{70} \Leftrightarrow -0,0673t = \ln \frac{2}{7} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\ln \frac{2}{7}}{-0,0673} \approx 18,6. \end{aligned}$$

Vậy nhiệt độ của vật là 50^0C sau khoảng 18,6 phút hay 18 phút 36 giây.

2.1.6. Một số định hướng trong việc sử dụng bài toán thực tiễn

Nội dung của các bài toán thực tiễn được coi là cơ sở quan trọng trong việc lồng ghép những bài toán đó vào quá trình dạy học. Tùy vào từng đối tượng học sinh, các giai đoạn khác nhau của quá trình dạy học mà giáo viên sử dụng bài toán thực tiễn cho phù hợp. Để bài học thêm sinh động, tạo các cơ hội liên hệ thực tế, trong nhiều trường hợp, giáo viên cần sử dụng các phương pháp xây dựng bài toán thực tiễn để sáng tạo thêm các bài toán thực tiễn đa dạng, phù hợp hơn. Dưới đây, tôi xin đưa ra một số định hướng sử dụng bài toán thực tiễn như sau:

- Định hướng 1: Sử dụng bài toán thực tiễn phù hợp với mỗi loại đối tượng học sinh.

+ Đối với học sinh trung bình, yếu, chúng ta cần sử dụng các bài toán thực tiễn ở mức độ thấp hơn, đó là những bài toán vận dụng trực tiếp công thức, các thao tác tính toán đơn giản. Giáo viên có sự hướng dẫn, gợi ý cho học sinh khi cần nhằm giúp các em hoàn thành được bài toán.

+ Đối với học sinh khá giỏi, giáo viên lựa chọn những bài toán thực tiễn ở mức độ khó hơn, đòi hỏi sự vận dụng tổng hợp nhiều công thức, sử dụng các thao tác tính toán phức tạp hơn.

- Định hướng 2: Sử dụng bài toán thực tiễn hợp lý tại các giai đoạn khác nhau của quá trình dạy học. Cụ thể:

+ Có thể sử dụng bài toán thực tiễn ở giai đoạn đặt vấn đề. Việc sử dụng bài toán thực tiễn ở giai đoạn này giúp học sinh thấy được sự cần thiết của việc học tập nội dung toán học, tạo hứng thú học tập cho các em.

+ Sử dụng bài toán thực tiễn vào giai đoạn củng cố, vận dụng kiến thức. Việc sử dụng bài toán thực tiễn ở giai đoạn này sẽ giúp học sinh hình thành các kiến thức về hàm số mũ, hàm số lôgarit một cách vững chắc, bổ sung và hoàn thiện kiến thức, biết vận dụng kiến thức về hàm số mũ và hàm số lôgarit vào giải quyết vấn đề thực tiễn.

+ Sử dụng bài toán thực tiễn vào giai đoạn kiểm tra, đánh giá. Cũng như ở giai đoạn củng cố kiến thức, các bài toán thực tiễn được sử dụng ở giai đoạn này ngoài việc giúp học sinh biết cách vận dụng các kiến thức về hàm số mũ và hàm số lôgarit vào giải quyết các vấn đề thực tiễn, còn giúp giáo viên và học sinh đánh giá khả năng học tập của học sinh, mức độ hoàn thành mục tiêu của quá trình dạy học để có phương án điều chỉnh phù hợp.

- Định hướng 3: Sử dụng bài toán thực tiễn một cách linh hoạt trong quá trình dạy học trên lớp. Chẳng hạn:

+ Sử dụng bài toán thực tiễn vào bài học hình thành kiến thức mới. Nếu sử dụng bài toán thực tiễn vào dạng bài học hình thành kiến thức mới, thì có thể sử dụng ở các giai đoạn khác nhau của quá trình dạy học.

+ Sử dụng bài toán thực tiễn vào dạng bài luyện tập, ôn tập.

+ Sử dụng bài toán thực tiễn vào dạy học chuyên đề, hoạt động ngoại khóa. Trong dạy học Toán, đối với dạy học chuyên đề hay hoạt động ngoại khóa, có thể dành toàn bộ thời gian xoay quanh bài toán thực tiễn. Khi đó, việc giải các bài toán thực tiễn trở thành một trong những mục tiêu trọng tâm.

Các định hướng sử dụng bài toán thực tiễn không hoàn toàn độc lập với nhau. Trong quá trình dạy học, cần kết hợp hợp lí các định hướng trên để quá trình dạy học đạt hiệu quả cao.

Kết luận: Toán học có nhiều ứng dụng trọng thực tiễn và cuộc sống. Một trong những yếu tố quan trọng trong dạy học Toán là giúp học sinh vận dụng những kiến thức, kĩ năng toán học cơ bản vào giải quyết các vấn đề thực tiễn một cách khoa học, có hệ thống. Có nhiều cách để xây dựng hệ thống bài toán thực tiễn nói chung và bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề “Hàm số mũ và hàm số lôgarit” nói riêng. Tuy nhiên, việc sử dụng bài toán thực tiễn như thế nào cho phù hợp phụ thuộc phần lớn vào năng lực của mỗi giáo viên chúng ta.

2.2. Tính mới, tính sáng tạo của các giải pháp mới (trình bày rõ tính mới, tính sáng tạo so với giải pháp cũ đang được áp dụng):

Trước hết, về tính mới: đề tài không chỉ dừng lại ở việc cung cấp kiến thức lí thuyết và bài tập thuần túy như trước đây mà đã xây dựng một hệ thống bài toán gắn với thực tiễn, được phân loại theo từng lĩnh vực như kinh tế, xã hội và các môn khoa học khác. Điều này giúp học sinh thấy rõ mối liên hệ giữa toán học và đời sống, khắc phục tình trạng học toán mang tính hình thức, thiếu ứng dụng. Đồng thời, sáng kiến cũng đưa ra quy trình cụ thể để giải bài toán thực tiễn (toán học hóa – giải toán – diễn giải – mở rộng), góp phần định hướng rõ ràng phương pháp tiếp cận cho học sinh.

Bên cạnh đó, về tính sáng tạo, tôi đã đề xuất nhiều cách thức xây dựng bài toán thực tiễn linh hoạt, như: xuất phát từ tình huống đời sống, từ các môn học liên quan, cải biên bài toán thuần túy hoặc phát triển từ bài toán có sẵn. Không chỉ dừng ở việc đưa bài tập, sáng kiến còn chú trọng định hướng sử dụng hệ thống bài toán theo từng đối tượng học sinh và từng giai đoạn dạy học, từ đó nâng cao hiệu quả giảng dạy. Đặc biệt, nội dung bài toán phong phú, gần gũi (tài chính, dân số, môi trường, vật lí, sinh học...) giúp phát triển năng lực vận dụng, tư duy liên môn và giải quyết vấn đề cho học sinh.

So với giải pháp cũ vốn thiên về truyền thụ kiến thức và luyện tập kỹ thuật giải toán, sáng kiến này đã chuyển mạnh sang phát triển năng lực người học, nhất là năng lực vận dụng toán học vào thực tiễn, qua đó góp phần đổi mới phương pháp dạy học theo định hướng chương trình giáo dục phổ thông mới.

2.3. Khả năng nhân rộng của sáng kiến (Chứng minh, phân tích các giải pháp đưa ra có khả năng nhân rộng trong cơ quan, đơn vị, địa phương và trên địa bàn toàn tỉnh/toàn quốc):

Sáng kiến có khả năng nhân rộng cao do nội dung và giải pháp mang tính phổ quát, dễ áp dụng trong thực tiễn dạy học môn Toán ở bậc THPT. Hệ thống

bài toán thực tiễn được xây dựng bám sát chương trình hiện hành, không phụ thuộc vào điều kiện đặc thù của từng trường, đồng thời có thể linh hoạt điều chỉnh phù hợp với nhiều đối tượng học sinh khác nhau. Quy trình xây dựng và sử dụng bài toán rõ ràng, dễ triển khai, giúp giáo viên ở các đơn vị khác có thể tiếp cận và áp dụng mà không cần nhiều thay đổi về cơ sở vật chất hay thời gian giảng dạy.

Về khả năng nhân rộng: sáng kiến trước hết có thể áp dụng hiệu quả tại phạm vi tổ/nhóm chuyên môn và toàn trường, bên cạnh đó sáng kiến cũng được các thành viên tổ Toán các trường như THPT Xuân Trường, THPT C Hải Hậu và THPT Trần Văn Bảo áp dụng trong năm học và góp phần nâng cao chất lượng dạy học chủ đề hàm số mũ và lôgarit tại các nhà trường. Trên cơ sở đó, giải pháp có thể mở rộng ra các trường THPT khác trong cùng địa phương và toàn tỉnh, do tính thống nhất của chương trình giáo dục phổ thông. Xa hơn, với định hướng phát triển năng lực và tăng cường bài toán thực tiễn, sáng kiến hoàn toàn có thể triển khai ở quy mô lớn hơn như một tài liệu tham khảo hữu ích cho giáo viên.

Về phạm vi ảnh hưởng: sáng kiến không chỉ tác động tích cực đến học sinh (nâng cao năng lực vận dụng kiến thức, tư duy thực tiễn) mà còn hỗ trợ giáo viên đổi mới phương pháp giảng dạy theo hướng hiện đại. Khi được áp dụng rộng rãi, sáng kiến góp phần nâng cao chất lượng dạy học môn Toán nói chung, đồng thời tạo sự lan tỏa trong việc đổi mới phương pháp dạy học ở các cơ sở giáo dục khác trong tỉnh. Do đó, sáng kiến không chỉ có phạm vi ảnh hưởng từ cấp cơ sở và các trường tham gia áp dụng như trên mà còn có tiềm năng ảnh hưởng tốt đẹp với tất cả các trường THPT trên phạm vi toàn tỉnh.

2.4. Hiệu quả áp dụng, lợi ích thu được từ sáng kiến (phân tích rõ hiệu quả, lợi ích thu được trong thời gian áp dụng sáng kiến, bao gồm: hiệu quả về mặt khoa học, kinh tế, xã hội...)

Sau thời gian triển khai áp dụng nội dung sáng kiến trong dạy học chủ đề *hàm số mũ và hàm số lôgarit*, tôi thấy sáng kiến đã mang lại những hiệu quả rõ rệt trên nhiều phương diện:

- Hiệu quả về mặt khoa học: Sáng kiến góp phần đổi mới phương pháp dạy học theo định hướng phát triển năng lực, đặc biệt là năng lực vận dụng toán học vào thực tiễn. Học sinh không chỉ nắm vững kiến thức lí thuyết mà còn biết cách mô hình hóa, giải quyết các tình huống thực tế. Cụ thể, kết quả kiểm tra cho thấy:
 - ☐ Tỷ lệ học sinh đạt điểm khá, giỏi ở các bài kiểm tra liên quan đến chủ đề tăng từ khoảng 55% (trước khi áp dụng) lên 75–80% (sau khi áp dụng).
 - ☐ Tỷ lệ học sinh làm được các bài toán vận dụng, vận dụng cao tăng rõ rệt, từ 30% lên khoảng 60%.
 - ☐ Học sinh chủ động hơn trong học tập, biết liên hệ kiến thức với thực tiễn thay vì học thụ động.

- Hiệu quả về mặt kinh tế: Sáng kiến không đòi hỏi đầu tư thêm về cơ sở vật chất hay thiết bị dạy học, chủ yếu sử dụng nguồn lực sẵn có (sách giáo khoa, tài liệu tham khảo, thiết bị trình chiếu). Đồng thời góp phần:

- Giảm chi phí mua tài liệu tham khảo bên ngoài do đã có hệ thống bài tập được xây dựng sẵn.
- Tiết kiệm thời gian cho giáo viên trong việc tìm kiếm và thiết kế bài toán thực tiễn.

=> Nhìn chung, sáng kiến có tính kinh tế cao, chi phí thấp nhưng hiệu quả lớn.

- Hiệu quả xã hội: Sáng kiến góp phần nâng cao chất lượng giáo dục, phù hợp với định hướng đổi mới của chương trình giáo dục phổ thông mới. Cụ thể:

- Giúp học sinh hình thành tư duy thực tiễn, biết vận dụng kiến thức vào đời sống (tài chính, môi trường, khoa học...).
- Tạo hứng thú học tập, giảm tâm lý “sợ môn Toán”.
- Góp phần đào tạo nguồn nhân lực có khả năng giải quyết vấn đề thực tiễn – đáp ứng yêu cầu xã hội hiện đại.

- Các hiệu quả khác:

- Nâng cao năng lực chuyên môn và đổi mới phương pháp giảng dạy của giáo viên.
- Tạo nguồn tài liệu tham khảo hữu ích cho tổ/nhóm chuyên môn và các đơn vị khác.
- Góp phần xây dựng môi trường học tập tích cực, phát huy tính chủ động, sáng tạo của học sinh.
- Có thể mở rộng áp dụng cho các chủ đề khác trong chương trình Toán THPT.

3. Danh sách những người đã tham gia áp dụng thử hoặc áp dụng sáng kiến lần đầu:

Số TT	Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác (hoặc nơi thường trú)	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Nội dung công việc hỗ trợ
1	Phạm Thanh Hải	29/02/1980	Trường THPT C Hải Hậu	GV Toán	Cử nhân	- Cùng áp dụng các hoạt động, phương pháp mới trong dạy học - Hỗ trợ tổ chức hoạt động nhóm, trải nghiệm, kiểm tra đánh giá theo sáng kiến

2	Vũ Thị Nga	10/6/1986	Trường THPT Trần Văn Bảo	Tổ phó tổ Toán	Cử nhân	- Cùng áp dụng các hoạt động, phương pháp mới trong dạy học - Góp ý nội dung, phương pháp, giáo án khi sáng kiến được triển khai thử nghiệm
3	Đinh Công Huân	20/8/1982	Trường THPT Xuân Trường	GV Toán	Thạc sĩ	- Cùng áp dụng các hoạt động, phương pháp mới trong dạy học - Tham gia đánh giá mức độ khả thi và hiệu quả của sáng kiến

4. Các thông tin cần được bảo mật (nếu có): Không có

IV. Phần kết luận

Sáng kiến “Xây dựng hệ thống bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề hàm số mũ và hàm số lôgarit” có vai trò quan trọng trong việc đổi mới phương pháp dạy học môn Toán theo định hướng phát triển năng lực. Thông qua việc đưa các bài toán gắn với thực tiễn vào giảng dạy, sáng kiến đã góp phần làm rõ mối liên hệ giữa kiến thức toán học và đời sống, giúp học sinh hiểu sâu bản chất kiến thức, đồng thời nâng cao khả năng vận dụng vào giải quyết các vấn đề thực tế. Đây là hướng đi phù hợp với yêu cầu của chương trình giáo dục phổ thông mới, có ý nghĩa thiết thực trong việc nâng cao chất lượng dạy học và tạo hứng thú học tập cho học sinh.

Trong quá trình áp dụng sáng kiến, tác giả rút ra một số bài học kinh nghiệm quan trọng. Trước hết, việc lựa chọn và xây dựng bài toán thực tiễn cần đảm bảo phù hợp với trình độ học sinh, tránh quá khó hoặc quá xa rời thực tế. Bên cạnh đó, giáo viên cần linh hoạt trong cách tổ chức dạy học, kết hợp hợp lý giữa lý thuyết và thực hành, giữa hướng dẫn và tự học để phát huy tính tích cực của học sinh. Đồng thời, cần chú trọng hướng dẫn học sinh quy trình giải bài toán thực tiễn nhằm hình thành phương pháp học tập khoa học và bền vững.

Để sáng kiến được triển khai hiệu quả và nhân rộng, tác giả đề xuất một số kiến nghị như sau:

- ☐ Nhà trường cần tạo điều kiện về thời gian, tài liệu và sinh hoạt chuyên môn để giáo viên trao đổi, chia sẻ kinh nghiệm trong việc xây dựng và sử dụng bài toán thực tiễn.
- ☐ Tổ/nhóm chuyên môn cần tăng cường xây dựng ngân hàng bài toán thực tiễn theo từng chủ đề, phục vụ giảng dạy lâu dài.
- ☐ Ngành giáo dục cần có định hướng cụ thể hơn trong việc đưa các bài toán thực tiễn

vào kiểm tra, đánh giá nhằm khuyến khích giáo viên và học sinh áp dụng rộng rãi.

Tóm lại, sáng kiến không chỉ có giá trị trong phạm vi một chủ đề cụ thể mà còn có thể mở rộng áp dụng cho nhiều nội dung khác của môn Toán, góp phần đổi mới phương pháp dạy học, nâng cao chất lượng giáo dục và đáp ứng yêu cầu phát triển của xã hội hiện nay.

Tôi xin cam đoan mọi thông tin nêu trong Bản mô tả là trung thực, đúng sự thật, không sao chép, không vi phạm bản quyền và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật./.

**XÁC NHẬN CỦA CƠ QUAN/
ĐƠN VỊ ÁP DỤNG SÁNG KIẾN**
(ký tên, đóng dấu)

Xuân Trường, ngày 06 tháng 5 năm 2026

Tác giả sáng kiến
(Ký và ghi rõ họ tên)



Bùi Đức Quang

MỤC LỤC

	BẢN MÔ TẢ SÁNG KIẾN	Trang
I	Thông tin chung	
II	Phần mở đầu	1
III	Phần nội dung	2
1	Mô tả giải pháp đã biết	2
2	Nội dung các giải pháp mới; tính mới, tính sáng tạo; hiệu quả áp dụng, khả năng nhân rộng của sáng kiến	3
2.1	<i>Nội dung các giải pháp mới</i>	3
2.1.1	<i>Mối liên hệ giữa toán học và thực tiễn</i>	3
2.1.2	<i>Bài toán thực tiễn trong dạy học môn Toán</i>	3
2.1.3	<i>Quy trình giải bài toán thực tiễn</i>	4
2.1.4	<i>Phương pháp xây dựng bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề “Hàm số mũ và hàm số logarit” ở trường trung học phổ thông</i>	4
2.1.5	<i>Một số dạng bài toán thực tiễn chủ đề Hàm số mũ và hàm số logarit</i>	6
2.1.6	<i>Một số định hướng trong việc sử dụng bài toán thực tiễn</i>	38
2.2	<i>Tính mới, tính sáng tạo của các giải pháp mới (trình bày rõ tính mới, tính sáng tạo so với giải pháp cũ đang được áp dụng):</i>	39
2.3	<i>Khả năng nhân rộng của sáng kiến (Chứng minh, phân tích các giải pháp đưa ra có khả năng nhân rộng trong cơ quan, đơn vị, địa phương và trên địa bàn toàn tỉnh/toàn quốc):</i>	39
2.4	<i>Hiệu quả áp dụng, lợi ích thu được từ sáng kiến (phân tích rõ hiệu quả, lợi ích thu được trong thời gian áp dụng sáng kiến, bao gồm: hiệu quả về mặt khoa học, kinh tế, xã hội...)</i>	40
3	Danh sách những người đã tham gia áp dụng thử hoặc áp dụng sáng kiến lần đầu (nếu có):	41
4	Các thông tin cần được bảo mật (nếu có)	42
IV	Phần kết luận	42

GIẤY CHỨNG NHẬN SÁNG KIẾN
HIỆU TRƯỞNG TRƯỜNG THPT XUÂN TRƯỜNG B
Chứng nhận

Ông: **Bùi Đức Quang**

Chức danh: Tổ trưởng tổ Toán

Nơi làm việc: Tổ Toán, Trường THPT Xuân Trường B

Là tác giả của sáng kiến: *Xây dựng hệ thống bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề hàm số mũ và hàm số lôgarit cho học sinh trung học phổ thông.*

Được áp dụng tại trường THPT Xuân Trường B đạt hiệu quả áp dụng, khả năng nhân rộng của sáng kiến cấp cơ sở năm học 2025-2026/.

Xuân Trường, ngày 21 tháng 05 năm 2026

Số: 169/QĐ-THPTXTB



Trần Xuân Trà

Giấy Chứng nhận sáng kiến số: 01/CN-THPTXTB

1. Tóm tắt nội dung sáng kiến: Việc đổi mới chương trình giáo dục phổ thông hiện nay tăng cường các bài toán liên môn và bài toán trong thực tiễn gắn liền quan tới chủ đề “Hàm số mũ và hàm số lôgarit”. Do vậy sáng kiến tôi đưa ra các định hướng xây dựng hệ thống bài tập đồng thời đưa ra quan điểm chung nhất để giải quyết những bài tập dạng này. Qua sáng kiến cũng đề xuất, định hướng khi áp dụng trong dạy học chủ đề cho học sinh nhằm đạt kết quả cao nhất trong quá trình dạy học của thầy cô.

2. Lợi ích kinh tế - xã hội có thể thu được do áp dụng sáng kiến:

Về lợi ích kinh tế: Sáng kiến không đòi hỏi đầu tư thêm về cơ sở vật chất hay thiết bị dạy học, chủ yếu sử dụng nguồn lực sẵn có (SGK, tài liệu tham khảo, thiết bị trình chiếu). Đồng thời góp phần:

- Giảm chi phí mua tài liệu tham khảo bên ngoài do có hệ thống bài tập được xây dựng sẵn.
- Tiết kiệm thời gian cho giáo viên trong việc tìm kiếm và thiết kế bài toán thực tiễn.

Về lợi ích xã hội: Sáng kiến góp phần nâng cao chất lượng giáo dục, phù hợp với định hướng đổi mới của chương trình giáo dục phổ thông mới. Cụ thể:

- Giúp học sinh hình thành tư duy thực tiễn, biết vận dụng kiến thức vào đời sống (tài chính, môi trường, khoa học...).
- Tạo hứng thú học tập, giảm tâm lý “sợ môn Toán”.
- Góp phần đào tạo nguồn nhân lực có khả năng giải quyết vấn đề thực tiễn – đáp ứng yêu cầu xã hội hiện đại/.

Số: 48/GXN-THPTTVB

V/v xác nhận áp dụng sáng kiến tại đơn vị

Hồng Quang, ngày 13 tháng 5 năm 2026

Kính gửi: Trường THPT Xuân Trường B

- Căn cứ Hướng dẫn số 2066/HD-SKHCN ngày 04/12/2025 của Sở Khoa học và Công nghệ về việc hướng dẫn hoạt động sáng kiến; đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng, khả năng nhân rộng của sáng kiến; đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng phạm vi ảnh hưởng của đề tài khoa học, đề án khoa học, công trình khoa học và công nghệ để làm căn cứ xét danh hiệu thi đua và hình thức khen thưởng trên địa bàn tỉnh Ninh Bình;

- Căn cứ Hướng dẫn số 02/HD-SGDĐT ngày 24/4/2026 về việc hướng dẫn hoạt động sáng kiến; Đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng, khả năng nhân rộng của sáng kiến; đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng phạm vi ảnh hưởng của đề tài khoa học, công trình khoa học và công nghệ lĩnh vực giáo dục đào tạo.

Trường THPT Trần Văn Bảo xác nhận đang áp dụng hiệu quả sáng kiến "**Xây dựng hệ thống bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề hàm số mũ và hàm số logarit cho học sinh trung học phổ thông**" của tác giả Bùi Đức Quang; trường THPT Xuân Trường B. Cụ thể như sau:

1. Về hiệu quả kinh tế: Sáng kiến không đòi hỏi đầu tư thêm về cơ sở vật chất hay thiết bị dạy học, chủ yếu sử dụng nguồn lực sẵn có (SGK, tài liệu tham khảo, thiết bị trình chiếu). Đồng thời:

- Giảm chi phí mua tài liệu tham khảo bên ngoài do đã có hệ thống bài tập được xây dựng sẵn.
- Tiết kiệm thời gian cho giáo viên trong việc tìm kiếm và thiết kế bài toán thực tiễn.

2. Về lợi ích xã hội: Sáng kiến góp phần nâng cao chất lượng giáo dục, phù hợp với định hướng đổi mới của chương trình giáo dục phổ thông mới. Cụ thể:

- Giúp học sinh hình thành tư duy thực tiễn, biết vận dụng kiến thức vào đời sống (tài chính, môi trường, khoa học...).
- Tạo hứng thú học tập, giảm tâm lý "sợ môn Toán".
- Góp phần đào tạo nguồn nhân lực có khả năng giải quyết vấn đề thực tiễn – đáp ứng yêu cầu xã hội hiện đại.

3. Hiệu quả khoa học: Sáng kiến góp phần đổi mới phương pháp dạy học theo định hướng phát triển năng lực, đặc biệt là năng lực vận dụng toán học vào thực tiễn. Học sinh không chỉ nắm vững kiến thức lý thuyết mà còn biết cách mô hình hóa, giải quyết các tình huống thực tế. Cụ thể, kết quả kiểm tra cho thấy:

- Tỷ lệ học sinh đạt điểm khá, giỏi ở các bài kiểm tra liên quan đến chủ đề tăng từ khoảng 55% (trước khi áp dụng) lên 70% (sau khi áp dụng).

- Tỷ lệ học sinh làm được các bài toán vận dụng, vận dụng cao tăng rõ rệt, từ 30% lên khoảng 50%.

- Học sinh chủ động hơn trong học tập, biết liên hệ kiến thức với thực tiễn thay vì học thụ động.

4. Hiệu quả khác (chuyên môn, nghiệp vụ, tác nghiệp...):

- Nâng cao năng lực chuyên môn và đổi mới phương pháp giảng dạy của giáo viên.
- Tạo nguồn tài liệu tham khảo hữu ích cho tổ/nhóm chuyên môn và các đơn vị khác.
- Góp phần xây dựng môi trường học tập tích cực, phát huy tính chủ động, sáng tạo của học sinh.

- Có thể mở rộng áp dụng cho các chủ đề khác trong chương trình Toán THPT.

Nơi nhận:

- Như trên;

- Lưu: Văn phòng.

PHÓ HIỆU TRƯỞNG

PHÓ HIỆU TRƯỞNG
NGUYỄN XUÂN TRUNG

TRƯỜNG THPT C HẢI HẬU

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Số: 01/GXN-THPTCHH

V/v xác nhận áp dụng sáng kiến tại đơn vị

Hải Hậu, ngày 13 tháng 5 năm 2026

Kính gửi: Trường THPT Xuân Trường B

- Căn cứ Hướng dẫn số 2066/HD-SKHCN ngày 04/12/2025 của Sở Khoa học và Công nghệ về việc hướng dẫn hoạt động sáng kiến; đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng, khả năng nhân rộng của sáng kiến; đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng phạm vi ảnh hưởng của đề tài khoa học, đề án khoa học, công trình khoa học và công nghệ để làm căn cứ xét danh hiệu thi đua và hình thức khen thưởng trên địa bàn tỉnh Ninh Bình;

- Căn cứ Hướng dẫn số 02/HD-SGDĐT ngày 24/4/2026 về việc hướng dẫn hoạt động sáng kiến; Đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng, khả năng nhân rộng của sáng kiến; đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng phạm vi ảnh hưởng của đề tài khoa học, công trình khoa học và công nghệ lĩnh vực giáo dục đào tạo.

Trường THPT C Hải Hậu xác nhận đang áp dụng hiệu quả sáng kiến *“Xây dựng hệ thống bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề hàm số mũ và hàm số logarit cho học sinh trung học phổ thông”* của tác giả Bùi Đức Quang; trường THPT Xuân Trường B. Cụ thể như sau:

1. Về hiệu quả kinh tế: Sáng kiến không đòi hỏi đầu tư thêm về cơ sở vật chất hay thiết bị dạy học, chủ yếu sử dụng nguồn lực sẵn có (SGK, tài liệu tham khảo, thiết bị trình chiếu). Đồng thời:

- Giảm chi phí mua tài liệu tham khảo bên ngoài do đã có hệ thống bài tập được xây dựng sẵn.
- Tiết kiệm thời gian cho giáo viên trong việc tìm kiếm và thiết kế bài toán thực tiễn.

2. Về lợi ích xã hội: Sáng kiến góp phần nâng cao chất lượng giáo dục, phù hợp với định hướng đổi mới của chương trình giáo dục phổ thông mới. Cụ thể:

- Giúp học sinh hình thành tư duy thực tiễn, biết vận dụng kiến thức vào đời sống (tài chính, môi trường, khoa học...).
- Tạo hứng thú học tập, giảm tâm lý “sợ môn Toán”.
- Góp phần đào tạo nguồn nhân lực có khả năng giải quyết vấn đề thực tiễn – đáp ứng yêu cầu xã hội hiện đại.

3. Hiệu quả khoa học: Sáng kiến góp phần đổi mới phương pháp dạy học theo định hướng phát triển năng lực, đặc biệt là năng lực vận dụng toán học vào thực tiễn. Học sinh không chỉ nắm vững kiến thức lý thuyết mà còn biết cách mô hình hóa, giải quyết các tình huống thực tế. Cụ thể, kết quả kiểm tra cho thấy:

- Tỷ lệ học sinh đạt điểm khá, giỏi ở các bài kiểm tra liên quan đến chủ đề tăng từ khoảng 55% (trước khi áp dụng) lên 70% (sau khi áp dụng).
- Tỷ lệ học sinh làm được các bài toán vận dụng, vận dụng cao tăng rõ rệt, từ 30% lên khoảng 50%.

- Học sinh chủ động hơn trong học tập, biết liên hệ kiến thức với thực tiễn thay vì học thụ động.

4. Hiệu quả khác (chuyên môn, nghiệp vụ, tác nghiệp...):

- Nâng cao năng lực chuyên môn và đổi mới phương pháp giảng dạy của giáo viên.
- Tạo nguồn tài liệu tham khảo hữu ích cho tổ/nhóm chuyên môn và các đơn vị khác.
- Góp phần xây dựng môi trường học tập tích cực, phát huy tính chủ động, sáng tạo của học sinh.
- Có thể mở rộng áp dụng cho các chủ đề khác trong chương trình Toán THPT.

Nơi nhận:

- Như trên;
- Lưu: VT.

BT. HIỆU TRƯỞNG
(Ký tên, đóng dấu)



PHÓ HIỆU TRƯỞNG
LƯU VĂN BÌNH

Số: 150/GXN-THPTXT

V/v xác nhận áp dụng sáng kiến tại đơn vị

Xuân Hồng, ngày 12 tháng 5 năm 2026

Kính gửi: Trường THPT Xuân Trường B

- Căn cứ Hướng dẫn số 2066/HD-SKHCN ngày 04/12/2025 của Sở Khoa học và Công nghệ về việc hướng dẫn hoạt động sáng kiến; đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng, khả năng nhân rộng của sáng kiến; đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng phạm vi ảnh hưởng của đề tài khoa học, đề án khoa học, công trình khoa học và công nghệ để làm căn cứ xét danh hiệu thi đua và hình thức khen thưởng trên địa bàn tỉnh Ninh Bình;

- Căn cứ Hướng dẫn số 02/HD-SGDĐT ngày 24/4/2026 về việc hướng dẫn hoạt động sáng kiến; Đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng, khả năng nhân rộng của sáng kiến; đánh giá, công nhận hiệu quả áp dụng phạm vi ảnh hưởng của đề tài khoa học, công trình khoa học và công nghệ lĩnh vực giáo dục đào tạo.

Trường THPT Xuân Trường xác nhận đang áp dụng hiệu quả sáng kiến ***“Xây dựng hệ thống bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề hàm số mũ và hàm số logarit cho học sinh trung học phổ thông”*** của tác giả Bùi Đức Quang; trường THPT Xuân Trường B. Cụ thể như sau:

1. Về hiệu quả kinh tế: Sáng kiến không đòi hỏi đầu tư thêm về cơ sở vật chất hay thiết bị dạy học, chủ yếu sử dụng nguồn lực sẵn có (SGK, tài liệu tham khảo, thiết bị trình chiếu). Đồng thời:

- Giảm chi phí mua tài liệu tham khảo bên ngoài do đã có hệ thống bài tập được xây dựng sẵn.
- Tiết kiệm thời gian cho giáo viên trong việc tìm kiếm và thiết kế bài toán thực tiễn.

2. Về lợi ích xã hội: Sáng kiến góp phần nâng cao chất lượng giáo dục, phù hợp với định hướng đổi mới của chương trình giáo dục phổ thông mới. Cụ thể:

- Giúp học sinh hình thành tư duy thực tiễn, biết vận dụng kiến thức vào đời sống (tài chính, môi trường, khoa học...).
- Tạo hứng thú học tập, giảm tâm lý “sợ môn Toán”.
- Góp phần đào tạo nguồn nhân lực có khả năng giải quyết vấn đề thực tiễn – đáp ứng yêu cầu xã hội hiện đại.

3. Hiệu quả khoa học: Sáng kiến góp phần đổi mới phương pháp dạy học theo định hướng phát triển năng lực, đặc biệt là năng lực vận dụng toán học vào thực tiễn. Học sinh không chỉ nắm vững kiến thức lý thuyết mà còn biết cách mô hình hóa, giải quyết các tình huống thực tế. Cụ thể, kết quả kiểm tra cho thấy:

- Tỷ lệ học sinh đạt điểm khá, giỏi ở các bài kiểm tra liên quan đến chủ đề tăng từ khoảng 55% (trước khi áp dụng) lên 75–80% (sau khi áp dụng).
- Tỷ lệ học sinh làm được các bài toán vận dụng, vận dụng cao tăng rõ rệt, từ 30% lên khoảng 60%.

- Học sinh chủ động hơn trong học tập, biết liên hệ kiến thức với thực tiễn thay vì học thụ động.

4. Hiệu quả khác (chuyên môn, nghiệp vụ, tác nghiệp...):

- Nâng cao năng lực chuyên môn và đổi mới phương pháp giảng dạy của giáo viên.
- Tạo nguồn tài liệu tham khảo hữu ích cho tổ/nhóm chuyên môn và các đơn vị khác.
- Góp phần xây dựng môi trường học tập tích cực, phát huy tính chủ động, sáng tạo của học sinh.
- Có thể mở rộng áp dụng cho các chủ đề khác trong chương trình Toán THPT.

Nơi nhận:

- Như trên;
- Lưu: Văn phòng.

KT. HIỆU TRƯỞNG

(Ký tên, đóng dấu)



PHÓ HIỆU TRƯỞNG
Nguyễn Văn Toàn